Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті

ӘОЖ 52-336:524.354.6.882:530.122 Қолжазба құқығында

НҰРБАҚЫТ ГҮЛМИРА

Жалпы салыстырмалық теориясында шағын объектілердің гравитациялық өрістері

6D061100 – Физика және астрономия

Философия докторы (PhD)
дәрежесін алу үшін дайындалған диссертация

Ғылыми кеңесші:
PhD, профессор
Бошкаев Куантай Авгазыевич

Шетелдік ғылыми кеңесші:
PhD, профессор
Jorge Armando Rueda Hernandez
Феррера университеті (Италия)

Қазақстан Республикасы
Алматы, 2025

МАЗМҰНЫ

КІРІСПЕ 6

1 ОСЬТІК СИММЕТРИЯЛЫ ГРАВИТАЦИЯЛЫҚ ӨРІС МӘСЕЛЕСІНІҢ ЖАҢА ТҰЖЫРЫМЫ 12

1.1 Эрнц теңдеуі 12

1.2 Эрнц теңдеуінің дәл шешімдері 14

1.3 Жуық шешімдер 16

1.4 Әдістеме, нәтижелер, талдаулар және басқа жұмыстармен салыстыру 17

2 ЭРЕЗ-РОЗЕН МЕН ХАРТЛ-ТОРН ШЕШІМДЕРІ 19

2.1 Эрез-Розен мен Хартл-Торн шешімдерін салыстыру 20

2.1.1 Эрез-Розен метрикасы 20

2.1.2 Зипой-Вурхиз түрлендіруі 21

2.1.3 Героч-Хансен мультипольдық моменттері 22

2.1.4 Эрез-Розен шешімін Зипой-Вурхиз параметрі арқылы жалпылау 24

2.1.5 Хартл-Торнның сыртқы шешімі 24

2.1.6 Координаттық түрлендірулер 26

2.2 Әртүрлі жуықтауда Эрез-Розен және Хартл-Торн метрикаларының сәйкестігі 28

2.2.1 Эрез-Розен және Хартл-Торн метрикаларының $\sim Q$ және $\sim M^2$ жуықтаудағы сәйкестігі 30

2.2.2 Эрез-Розен метрикасынан Хартл-Торн метрикасына өтетін координаттық түрлендірулер 31

3 ЖАЛПЫ САЛЫСТЫРМАЛЫҚ ТЕОРИЯСЫНДА ДЕНЕЛЕР ҚОЗҒАЛЫСЫНЫҢ АДИАБАТТЫҚ ТЕОРИЯСЫ 33

3.1 Ньютон механикасындағы векторлық элементтер 35

3.2 Квази-Кеплер есебі 36

3.3 Шварцшильд есебі 41

3.4 Лензе-Тирринг есебі және релятивистік эффектердің суперпозиция принципі 49

3.5 Лензе-Тирринг есебі және адиабаттық қозғалыс теориясы 55

3.6 Адиабаттық теория арқылы Хартл-Торн метрикасында денелер қозғалысын зерттеу 59

3.7 Адиабаттық теория арқылы Керр метрикасында денелер қозғалысын зерттеу 65

4 ҚАРАҢҒЫ МАТЕРИЯНЫҢ ФЕРМИОНДЫҚ ЯДРОЛАРЫНЫҢ ГРАВИТАЦИЯЛЫҚ КОЛЛАПСЫНАН ПАЙДА БОЛҒАН АСА МАССИВТІ ҚАРА ҚҰРДЫМДАР 75

4.1 Аса массивті қара құрдымдардың қалыптасу механизмдері 76

МАЗМҰНЫ

4.2 Қара құрдым массасы және спинінің эволюциясы 81

4.3 Керр қара құрдымы массасының өсуі 83

ҚОРЫТЫНДЫ 87

ПАЙДАЛАНЫЛҒАН ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ 90

ҚОСЫМША А ПРЕСС-ШЕХТЕР ПАРАДИГМАСЫ БОЙЫНША ҚАРАҢҒЫ МАТЕРИЯ ГАЛОСЫНЫҢ ҚАЛЫПТАСУЫ 101

ҚОСЫМША В ГЕОДЕЗИКАЛЫҚ ДИСКТІҢ АККРЕЦИЯСЫ 105

НОРМАТИВТІК СІЛТЕМЕЛЕР

Осы диссертациялық жұмыста келесі нормативтік құжаттарға сілтемелер жасалды:

1. Қазақстан Республикасының «Ғылым туралы» Заңы. – 2011 жылғы 18 ақпандағы № 407-IV.

2. Қазақстан Республикасының Білім және ғылым министрінің 2011 жылғы 20 сәуірдегі № 152 бұйрығымен бекітілген Жоғары оқу орнынан кейінгі білім берудің мемлекеттік жалпыға міндетті стандарты.

3. ҚР СТ 34.014-2005. Ғылыми-зерттеу жұмыстары туралы есеп. Құрылымы мен рәсімделуіне қойылатын талаптар.

4. ҚР СТ 7.32–2003. Ақпарат, кітапхана және баспа ісі. Ғылыми-зерттеу құжаттарының библиографиялық сипаттамасы. Жалпы талаптар мен ережелер.

5. ISO 690:2010. Information and documentation – Guidelines for bibliographic references and citations to information resources.

6. Қазақстан Республикасының «Атом энергиясын пайдалану туралы» Заңы. – 2016 жылғы 12 сәуірдегі № 447-V ҚРЗ.

7. Жалпы салыстырмалылық теориясына, қара құрдымдарға және астрофизикаға қатысты халықаралық ғылыми журналдар мен мақалалар (диссертацияда көрсетілген).

АНЫҚТАМАЛАР, БЕЛГІЛЕУЛЕР, ҚЫСҚАРТУЛАР МЕН АУДАРМАЛАР

Қысқартылған сөз	Толық атауы
$M_{\otimes}$	Күннің массасы
а.б.	Астрономиялық бірлік
пк	Парсек (астрономиялық қашықтық бірлігі)
ЖСТ	Жалпы салыстырмалылық теориясы
RXTE	*Rossi X-ray Timing Explorer* (Рентгендік уақытша бақылаушы спутнигі)
ҚМ	Қараңғы материя
ҚҚ	Қара құрдым
ЭӨТ	Эйнштейннің өріс теңдеулері
ЭР	Эрез-Розеннің дәл шешімі
ХТ	Хартл-Торн метрикасы
МАШГН	Массивті астрофизикалық шағын гало нысандары
КФ	Классикалық физика
ТВСГТ	Тензор-векторлық-скалярлық гравитациялық теория
ТОВ теңдеулері	Толмен-Оппенгеймер-Волков теңдеулері
АМҚҚ	Аса массивті қара құрдым
ҚҚТА	Қара құрдымға тікелей айналу
МЭАП	Максималды энтропияны алу принципі
ЖҚМ	Жылы қараңғы материя
RAR	*Ruffini Argüelles-Rueda* (Авторлар)
КМ	Кведедо мен Машхун (Авторлар)
ТФ	Таралу функциясы
ЛСҚМ	Лямбда суық қараңғы материя
СҚМ	суық қараңғы материя
ЖҚМ	жылы қараңғы материя
ІОШО	ішкі орнықты шеңберлік орбита
БРПН	Бірінші ретті пост-Ньютондық
ОВ	Оппенгеймер-Волкофф

КІРІСПЕ

Зерттеудің жалпы сипаттамасы

Шағын объектілер класына жиі планета тәрізді денелер, ақ ергежейлі жұлдыздар, нейтрондық жұлдыздары, басқа да экзотикалық тығыз жұлдыздар мен қара құрдымдар кіреді. Дәстүрлі астрофизикалық объектілердің гравитациялық өрісін сипаттау үшін Ньютонның гравитация теориясы жеткілікті екені белгілі. Алайда квазарлар мен пульсарлар сияқты экзотикалық тығыз объектілердің ашылуы, сондай-ақ гравитациялық коллапстың қара құрдымға дейін жету мүмкіндігі салыстырмалық теориясының астрономия мен астрофизикадағы маңыздылығын көрсетеді. Сонымен қатар, ғарыштық зерттеулердің жетістіктері мен заманауи өлшеу технологияларының дамуы салыстырмалылық эффектілерін тіпті Күн жүйесінің ішінде де ескеруді талап етеді.

Қазіргі релятивистік гравитацияның маңызды міндеттерінің бірі – Эйнштейннің салыстырмалылық теориясы негізінде Ғаламды сипаттау, атап айтқанда жұлдыздар мен қара құрдымдар сияқты аспан денелерінің айналасындағы гравитациялық өрістердің сипаттамаларын зерттеу және олардың динамикалық қасиеттерін түсіндіру болып табылады.

Жалпы салыстырмалылық теориясы Эйнштейннің кеңістік-уақыттың иілісі арқылы гравитацияны сипаттайтын іргелі теориясы. Бұл теория Ньютон механикасын кеңейтіп, күшті гравитациялық өрістердегі астрофизикалық құбылыстарды түсіндіруге мүмкіндік берді. Жалпы салыстырмалылық теориясы тек теориялық физикада ғана емес, сонымен қатар астрофизикада, аспан механикасында, космологияда, шағын объектілер мен гравитациялық толқындар физикасында да маңызды рөл атқарады.

Осы диссертациялық жұмыс жалпы салыстырмалылық теориясы аясында нейтрондық жұлдыздары мен қара құрдымдарды қоса алғанда, шағын объектілердің гравитациялық өрісін сипаттауға арналған. диссертациялық жұмыста қара құрдымдардың пайда болу шарттары, олардың физикалық сипаттамалары мен гравитациялық әсерлері қарастырылады. Сонымен қатар, аса массивті қара құрдымдар туралы бақылау деректерімен сәйкестігі, жалпы салыстырмалылық теориясы шешімдерінің қолдану аймақтары және балама модельдермен салыстырмалы талдау жүргізіледі. Бұл жұмыс теориялық модельдер мен заманауи бақылау нәтижелері негізінде шағын объектілердің табиғатын тереңірек сипаттауға бағытталған.

Зерттеудің өзектілігі

Қазіргі заманғы физика мен астрономияның маңызды бағыттарының бірі – жұлдыздар мен қара құрдымдар сияқты аспан денелерінің маңындағы гравитациялық өрістерді жалпы салыстырмалылық теориясы аясында зерттеу болып табылады. Жалпы салыстырмалылық теориясы – Эйнштейн ұсынған гравитацияны кеңістік пен уақыттың қисықтығы арқылы сипаттайтын іргелі

теория. Бұл теория Ньютон механикасын кеңейтіп, күшті гравитациялық өрістер мен ғарыштық құбылыстарды түсінуге жол ашады.
Жалпы салыстырмалылық теориясының практикалық қолданысы кең: мысалы, ғаламдық позициялау жүйелері (GPS – Global Positioning System) мен «Voyager», «New Horizons» сияқты ғарыш аппараттарының траекторияларын есептеуде жалпы салыстырмалылық теориясына негізделген түзетулер қажет. Сондай-ақ нейтрондық жұлдыздарды, рентгендік қос жұлдыздарды немесе галактикалардың ядроларындағы объектілерді жалпы салыстырмалылық теорияны ескермей сипаттау мүмкін емес.

Қара құрдымдар – қазіргі астрофизиканың негізгі зерттеу нысандарының бірі. Жалпы салыстырмалылық теориясы пайда болғанға дейін «қара жұлдыздар» сияқты гипотетикалық объектілер ұсынылған еді. Алайда 1967 жылдан бастап пульсарлардың, қос жұлдызды жүйелердегі қара құрдым кандидаттарының, белсенді галактикалық ядролардың, квазарлар мен блазарлардың ашылуы нәтижесінде қара құрдымдар нақты астрофизикалық объектілер ретінде мойындалды. Тығыз қос жұлдызды жүйелерде бақыланған шағын денелер сол кезде белгілі нейтрондық жұлдыздар мен ақ ергежейлілерге сәйкес келмеді. Сонымен қатар галактикалар орталығында массасы миллиондаған, кей жағдайда миллиардтаған Күн массасына тең объектілер анықталды, олардың табиғатын тек аса массивті қара құрдымдар арқылы түсіндіруге болады.

2016 жылдан бастап гравитациялық толқындардың тіркелуінен кейін жұлдыз массасындағы қара құрдымдар физикасына деген қызығушылық айтарлықтай артты. Эйнштейн болжаған бұл құбылыс жоғары сезімтал лазерлік интерферометрлер – LIGO (*Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory* – Лазерлік интерферометрлік гравитациялық толқын обсерваториясы) мен Virgo (гравитациялық толқындарды анықтауға арналған интерферометр обсерваториясы) көмегімен және жаңа анықтау мен деректерді талдау әдістерінің енгізілуі арқылы ашылды.
M87 галактикасы мен Құс жолы галактикасының орталығындағы аса массивті қара құрдымдардың көлеңке бейнесін алу – жаһандық ғылыми ынтымақтастықтың маңызды жетістігі болды. Бұл зерттеу жалпы салыстырмалылық теориясы болжауларын растады және оның дұрыстығын дәлелдеді.

Қазіргі таңда Шварцшильд, Рейснер-Нордстрём және Керр шешімдері сияқты қара құрдымдарға арналған баламалы шешімдер ұсынылғанымен, бақылау дәлдігі олардың айырмашылықтарын анықтауға жеткіліксіз.
Айта кету керек, 2017 жылы Райнер Вайсс, Барри Бэриш және Кип Торн гравитациялық толқындарды тіркеуге қосқан үлесі үшін Нобель сыйлығына ие болды, ал 2020 жылы Роджер Пенроуз, Райнхард Генцель және Андреа Гез қара құрдымдарға қатысты жаңалықтары үшін осы сыйлықты иеленді.

Ғаламның пайда болу тарихын кезең-кезеңімен түсіну де жалпы салыстырмалылық теориясы мен заманауи астрофизиканың жетістігі болып табылады. Үлкен жарылыстан (13,8 миллиард жыл бұрын) бастап алғашқы элементтердің түзілуі, космостық микротолқынды фонның бөлінуі, алғашқы жұлдыздар мен галактикалардың қалыптасуы, Күн жүйесінің пайда болуы – осының бәрі физикалық заңдылықтарға негізделген. Қазіргі уақытта Ғаламның кеңеюі жалғасуда.

Алайда аса массивті қара құрдымдардың пайда болуы толық анықталмаған. Түрлі гипотезалар бар: бастапқы газ бұлттарының тікелей коллапсы, жұлдыз массасындағы қара құрдымдардың бірігуі немесе алғашқы жұлдыздардың қалдықтарынан материяның аккрециясы. 2025 жылы астрономдар алғаш рет галактиканың шетінде кезіп жүрген аса массивті қара құрдымның жұлдызды жұтып жатқан сәтін – AT2024tvd оқиғасы ретінде бақылады. Бұл қара құрдымдар тек галактикалар орталығында ғана емес, басқа аймақтарда да бола алатынын көрсетеді. Қара құрдымдарды зерттеу болашақта да жалғаса береді.

Осылайша, қара құрдымдардың пайда болуы, қасиеттері мен сипаттамаларын жалпы салыстырмалылық теориясы аясында зерттеу – заманауи астрофизиканың басты бағыттарының бірі болып табылады. Сондықтан бұл диссертациялық жұмыстың тақырыбы, мақсаты мен міндеттері «физика және астрономия» мамандығына толық сәйкес келеді.

Зерттеудің мақсаты

Қара құрдымдар мен нейтрондық жұлдыздардың гравитациялық өрістерін жалпы салыстырмалылық теориясы негізінде зерттеу.

Зерттеу нысандары

Күшті гравитациялық өрістер, қара құрдымдар мен нейтрондық жұлдыздар, Эйнштейн өріс теңдеулері. Сынама бөлшектердің қозғалысы.

Зерттеу пәні

Эйнштейннің өріс теңдеулерінің дәл және жуық шешімдері. Жалпы салыстырмалық теориясындағы денелер қозғалысының адиабаттық теориясы. Аса массивті қара құрдымдардың түзілу механизмі.

Зеттеу әдісі

Бұл зерттеуде келесі теориялық және сандық әдістер қолданылды:

- Эйнштейн өріс теңдеулерінің аналитикалық және сандық шешімдері;
- Дифференциалдық геометрия және тензорлық талдау әдістері;
- Лагранж және Гамильтон формализмі, пертурбативтік әдіс;
- Сандық модельдеу.

Зерттеудің міндеттері

Жұмыстың мақсатына жету үшін келесі міндеттер қойылды:

1. Эрез-Розеннің жуықталған метрикасы мен Хартл-Торнның сыртқы статикалық метрикасы арасындағы байланысты анықтау.
2. Жалпы салыстырмалық теориясында денелер қозғалысын адиабаттық теория арқылы зерттеу.
3. Фермиондық қараңғы материяның гравитациялық коллапсы нәтижесінде пайда болған аса массивті қара құрдымдардың түзілуін зерттеу.

Ғылыми жаңалығы мен ерекшелігі

Осы жұмыста алғаш рет:

1. Эрез-Розеннің жуық метрикасы мен Хартл-Торнның сыртқы статикалық шешімі арасында ~Q және M^2 жуықтауында Зипой-Вурхиз түрлендіруін қолданбай-ақ байланыс орнатылды.

2. Адиабаттық теория аясында сынақ бөлшектерінің қозғалысын сипаттау арқылы Хартл-Торн және Керр метрикалары үшін $1/c^2$ жуықтауында перигелий прецессиясының өрнегі алынды. Орталық дененің айналуы мен деформациясының сынақ бөлшегі траекториясына әсері көрсетілді. Сонымен қатар, алынған формуланың салыстырмалық эффектілерінің суперпозиция принципіне сәйкес келетіні дәлелденді.

3. Аса массивті қара құрдымдардың түзілуінің жаңа механизмі ұсынылды. Бұл механизмге сәйкес, аса массивті қара құрдымдар галактика орталықтарында қараңғы материяның гравитациялық коллапсы нәтижесінде түзіледі. Осы механизм арқылы түзілген қара құрдымдар кейін аккреция есебінен массасын арттырады.

Қорғауға ұсынылатын ғылыми тұжырымдар

1. Эрез-Розеннің жуық метрикасы мен Хартл-Торнның статикалық метрикасы арасындағы байланыс Q және M^2 жуықтауында Зипой-Вурхиз түрлендіруінсіз орнатылады. Ал тек Q жуықтауында екі метрика арасындағы байланысты тек Зипой-Вурхиз түрлендіруі арқылы ғана орнатуға болады.

2. Гравитациялық өріс көзі массасының, айналу моментінің және квадруполь моментінің әсері салыстырмалы эффектілердің суперпозиция принципі арқылы сипатталады. Күннің айналу және квадруполь моменттерінің планеталар перигелийінің ығысуына әсері мардымсыз.

3. Галактиканың орталығындағы бастапқы қара құрдымдар тығыз фермиондық қараңғы материя ядроларының гравитациялық коллапсы нәтижесінде түзіледі. Бұл үдеріс дәстүрлі жұлдыздық механизмдерге қарағанда әлдеқайда жылдамырақ жүріп, аса ауыр қара құрдымдардың пайда болуына себеп болады.

Зерттеудің теориялық және практикалық маңызы

Зерттеу нәтижелері астрофизика, шағын объектілер физикасы және космология салаларында теориялық және сандық әдістердің дамуына өз үлесін қосады. Сонымен қатар, алынған теориялық нәтижелер рентгендік пульсарлар мен гамма-сәулелену көздерін түсіндіруге мүмкіндік береді.

Алынған нәтижелердің сенімділігі мен негізділігі

Алынған нәтижелер бақылау мәліметтеріне сәйкес келеді. Диссертациялық жұмыстың сенімділігі жоғары импакт-факторлы шетелдік журналдарда және ҚР ҒЖБМ Ғылым және жоғары білім саласындағы сапаны қамтамасыз ету комитеті ұсынған басылымдарда жарияланған мақалалармен расталады.

Автордың жеке үлесі

Автор зерттеу жұмысының барлық үдерісін басынан аяғына дейін өзі орындады, оның ішінде әдеби шолу мен барлық сандық есептеулер бар. Бұл жұмыс ғылыми жетекшілерімен кеңесе отырып жүргізілді. Автор зерттеу әдістерін таңдауға тікелей қатысып, алынған нәтижелерді ғылыми жетекшілерімен бірлесе талдады.

Жұмыстың апробациясы

Диссертациялық жұмысты жазу барысында 8 ғылыми мақала жарық көрді. Оның ішінде 2 мақала ҚР ҒЖБМ Ғылым және жоғары білім саласындағы сапаны қамтамасыз ету комитеті ұсынған беделді басылымдарда – *International Journal of Mathematics and Physics* және *Қазақстан Республикасы Ұлттық ғылым академиясының Хабарлары. Физика-математика сериясы* журналдарында жарияланды. 3 мақала *Web of Science* және *Scopus* дерекқорларына енген жоғары импакт-факторлы халықаралық журналдарда жарияланды. Сонымен қатар, 3 тезис халықаралық конференцияларда ұсынылды. Бұл диссертация жалпы салыстырмалылық теориясы аясындағы шағын объектілердің гравитациялық өрісін зерттеуге елеулі үлес қосады.

Thomson Reuters немесе Scopus халықаралық ғылыми дерекқорларына кіретін басылымдарда жарияланған импакт-факторы жоғары мақалалар.

1. Boshkayev K., Quevedo H., Nurbakyt G., Malybayev A., Urazalina A. The Erez-Rosen Solution versus the Hartle-Thorne Solution // Symmetry – 2019. – Vol.11(10). – art. № 1324. *(***WoS (JCR):** Impact Factor (2019) = 2.645, Q2. **Scopus (CiteScore):** 54%*).*

2. Arguelles C. R., Boshkayev K., Krut A., Nurbakyt G., Rueda J. A., Ruffini R., Uribe-Suarez J. D. Yunis R. On the growth of supermassive black holes formed from the gravitational collapse of fermionic dark matter cores // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, (MNRAS) – 2023. – Vol. 523(2). – P. 2209-2218. *(***WoS (JCR):** Impact Factor (2022) = 4.8, Q1. **Scopus (CiteScore):** 85%*).*

3. Boshkayev K., Nurbakyt G., Quevedo H., Suliyeva G., Taukenova A. S., Tlemissov A., Tlemissova Zh., Urazalina A., Dalelkhankyzy A., Stuchlik Z., Beissen N., Gumarova Sh. “Adiabatic theory in Kerr spacetimes” // General Relativity and Quantum Cosmology. – 2024. – Vol. 56(5). – art. №. 67 *(***WoS (JCR):** IF (2022) = 2.0, Q2. **Scopus (CiteScore):** 73%*).*

Қазақстан Республикасы Ғылым және жоғары білім министрлігінің Ғылым және жоғары білім саласында сапаны қамтамасыз ету комитеті ұсынған басылымдардағы жарияланымдар.

1. Boshkayev K., Malybayev A., Quevedo H., Nurbakyt G., Taukenova A., Urazalina A. The correspondence of the Erez-Rosen solution with the Hartle-Thorne solution in the limiting case of ~Q and ~M^2//News of the National Academy of science of the Republic of Kazakhstan: Physico-Mathematical Series, – 2020. – Vol. 5, no.333 – P. 19-27.

2. Suliyeva G. B., Boshkayev K., Nurbakyt G., Quevedo H., Taukenova A. S., Tlemissov A. T., Tlemissova Zh. A., Urazalina A. Adiabatic theory of motion of bodies in the Hartle-Thorne spacetime // International Journal of Mathematics and Physics. – 2022. – Vol. 13 (1). – P. 82-90.

Халықаралық және отандық ғылыми конференциялар материалдарында жарияланған мақалалар.

1. Boshkayev K.A., Nurbakyt G. Correspondence of the Erez-Rosen metric with the q-metric // International Scientific Conference of students and Young scientists "Farabi Alemi" of Al-Farabi Kazakh National University, Almaty – 2019. – P. 13.

2. Boshkayev K.A., Zhumakhanova G., Nurbakyt G. Erez-Rosen metric versus q-metric // The 6th International Workshop of Nuclear Physics, Nuclear Astrophysics and Cosmic Rays Almaty, Kazakhstan, – 2019. – P. 58.

3. Нұрбақыт Г. Қонысбаев Т., Курманов Е. Квазипериодты тербелістер арқылы шағын нысандардың негізгі параметрлерін анықтау // «Фараби әлемі» атты студенттер мен жас ғалымдардың халықаралық ғылыми конференция материалдары, Алматы, Қазақстан. – 2022. – Б. 54.

Диссертациялық жұмыстың құрлымы мен көлемі

Диссертациялық жұмыс кіріспеден**,** 4 тараудан**,** қорытындыдан және пайдаланылған әдебиеттер тізімінен тұрады. Жұмыс 316 формула, 2 кесте, 11 сурет 191 әдебиеттер тізімі мен 108 бетті қамтиды.

1 ӨСТІК СИММЕТРИЯЛЫ ГРАВИТАЦИЯЛЫҚ ӨРІС МӘСЕЛЕСІНІҢ ЖАҢА ТҰЖЫРЫМЫ

Қазіргі уақытта айтарлықтай өзекті мәселелердің бірі – бірқалыпты айналатын дененің гравитациялық өрісін анықтау. Керр вакуумдық өріс теңдеулерінің алгебралық тұрғыдан арнайы шешімдерін зерттеп, ықтимал сыртқы өрісті тапқанымен, Керр шешімін жалпылау әрекеттері сәтсіз аяқталды [1]. Осы мақалада мәселе азимутқа тәуелсіз комплекс функция ε арқылы қайта қарастырылады. Бұл функция келесі вариациялық принципке сәйкес таңдалуы керек:

$$\delta\int\frac{\nabla\varepsilon\cdot\nabla\varepsilon^*}{(\mathrm{Re}\,\varepsilon)^2}\,d\upsilon=0, \tag{1.1}$$

мұнда $d\upsilon$ – үш өлшемді Евклидтік көлем элементі. Мұндай комплекс функция ε табылған жағдайда, Эйнштейннің вакуумдық өріс теңдеулерінің осьтік симметриялы шешімін құруға болады.

Осьтік симметриялы гравитациялық өріс мәселесін мұндай тұжырымдау бірқатар артықшылықтарға ие. Вариациялық принцип те, сәйкес өріс теңдеулері де жоқ белгілі бір координаталар жүйесін білдіреді:

$$(\mathrm{Re}\,\varepsilon)\nabla^2\varepsilon=\nabla\varepsilon\cdot\nabla\varepsilon \tag{1.2}$$

Өз қалауына қарай, теңдеулермен абстрактілі түрде жұмыс істеуге немесе оларды цилиндрлік, созылыңқы сфероидалдық немесе кез келген басқа координаталарда өрнектеуге болады. Сонымен қатар, өріс теңдеуі біртекті квадраттық түрге ие және ол ұйтқыу теориясын қолдану үшін тамаша құрал болып табылады. Соңында, осьтік симметриялы барлық белгілі шешімдерді ε функциясы арқылы қарапайым түрде өрнектеуге болады.

1.1 Эрнц теңдеуі

Папапетру негінде біз сызық элементін өрнектейміз

$$ds^2=f^{-1}\left[e^{2\gamma}\left(dz^2+d\rho^2\right)+\rho^2d\phi^2\right]-f\left(dt-\omega d\phi\right)^2, \tag{1.1.1}$$

мұндағы f, ω және γ - тек z және ρ ның ғана функциялары[2]. Өріс теңдеулерінің толық жиынтығын дәстүрлі тензорлық әдістермен немесе қазіргі заманғы сандық есептеулердің әдістерімен алуға болады. Алайда, қазіргі кезде бізді тек f және ω анықтайтын теңдеулер қызықтырады және оларды лагранждық тығыздықтан алуға болады.

$$L=-\frac{1}{2}\rho f^{-2}\nabla f\cdot\nabla f+\frac{1}{2}\rho^{-1}f^2\nabla\omega\cdot\nabla\omega.$$

f және ω функцияларын түрлендіре отырып, өріс теңдеулерін аламыз.

$$f\nabla^2 f = f\nabla f\nabla - \rho^{-2} f^4 \nabla\omega \cdot \nabla\omega, \qquad (1.1.2)$$

$$\nabla \cdot \left(\rho^{-2} f^2 \nabla\omega\right) = 0. \qquad (1.1.3)$$

Екі теңдеуде үшөлшемді алшақтық операторы түсіндірілген. Екінші жағынан, егер 8-азимут бағытында бірлік векторы, ал p-азимутқа тәуелді емес кез келген ақылға қонымды функция болса, онда бізде сәйкестілік бар.

Екі теңдеуде де үш өлшемді дивергенция операторын түсіну керек. Екінші жағынан, егер азимут бағытындағы $\hat{n}$ бірлік вектор болса және φ азимутқа тәуелсіз кез келген ақылға қонымды функция болса, онда мынадай сәйкестік алынады

$$\nabla\left(\rho^{-1}\hat{n} \times \nabla\varphi\right) = 0. \qquad (1.1.4)$$

(1.1.3) теңдеуді интегралдылық ретінде қарастыруға болады формуламен анықталған φ функциясының болуының шарты

$$\rho^{-1} f^2 \nabla\omega = \hat{n} \times \nabla\varphi. \qquad (1.1.5)$$

Бұл қатынас мынаған баламалы

$$f^{-2}\nabla\varphi = -\rho^{-1}\hat{n} \times \nabla\omega,$$

Осы сәйкестік (1.1.4) өріс теңдеуін білдіреді

$$\nabla \cdot (f^{-2}\nabla\varphi) = 0 \qquad (1.1.6)$$

φ жаңа потенциал үшін (1.1.2) теңдеуі φ функциясымен өрнектелгенде және (1.1.6) теңдеумен салыстырылғанда, күрделі функция көрінеді

$$\varepsilon = f + i\varphi \qquad (1.1.7)$$

қарапайым біртекті квадраттық дифференциалдық теңдеуді (1.2) қанағаттандырады.

ε теңдеудің бірқатар қарапайым модификациялары бар, олар да пайдалы болуы мүмкін. Мысалы, егер бірге ауыстырса

$$\varepsilon = (\xi - 1)/(\xi + 1), \qquad (1.1.8)$$

Біреуі дифференциалдық теңдеуді қамтиды

$$(\xi\xi^* - 1)\nabla^2\xi = 2\xi^*\nabla\xi\cdot\nabla\xi, \tag{1.1.9}$$

Бұл вариациялық принциптен туындайды.

$$\delta\int\frac{\nabla\xi\cdot\nabla\xi^*}{(\xi\xi^*-1)^2}d\upsilon = 0. \tag{1.1.10}$$

Сонымен қатар, экспоненциалды түрде кейде ε немесе ξ екеуінде де жазу ыңғайлы. Бұл жағдайда келесі нәтижелер болады:

$$\varepsilon = e^{\mu}\mathbf{;}\ \ \nabla^2\mu = i\tan(\mathrm{Im}\mu)\nabla\mu\cdot\nabla\nu, \tag{1.1.11}$$

$$\xi = e^{\nu}\mathbf{;}\quad \nabla^2\nu = \coth(\mathrm{Re}\nu)\nabla\nu\cdot\nabla\nu. \tag{1.1.13}$$

1.2 Эрнц теңдеуінің дәл шешімдері

Жоғарыдағы (1.1.9) теңдеуден, егер ξ - шешім болса, онда $e^{i\alpha}\xi$ ге де қатысты болады, мұндағы α кез келген дәл тұрақты. Тұрақты фазалық шешім жағдайында біз жаңа ψ потенциалын енгізе аламыз

$$\xi = -e^{i\alpha}\coth\psi. \tag{1.2.1}$$

Сонда ψ нақты функциясы Лаплас теңдеуін қанағаттандырады

$$\nabla^2\psi = 0. \tag{1.2.2}$$

Сондықтан, біз ψ ді «көпполюсті» ұғымы арқылы білдіре аламыз. Осылайша табылған шешімдер, әрине, 1917 жылы Вейл[3] ($\alpha = 0$) және 1953 жылы Папапетру[2] ($\alpha = \frac{1}{2}\pi$) зерттеген белгілі өрістер. Өкінішке орай, $\alpha \neq 0$ (mod π) болған кезде, егер кеңістік шексіздікте тегіс болуы керек болса, монополияның үлесін ψ ден алып тастау керек. Осылайша, соңғы шешімдердің физикалық тұрғыдан әсері тым аз.

Зипой[4] атап өткендей, (1.2.2) теңдеуді цилиндрлік координаттарда емес, ұзартылған сфероидтық координаттарда бөлудің мағынасы бар. Егер біз былай жазсақ

$$\rho = (x^2-1)^{1/2}(1-y^2)^{1/2},$$

$$z = xy, \tag{1.2.3}$$

Лаплас операторы мына түрде болады

$$\nabla^2 = \frac{1}{x^2 - y^2}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 - 1\right)\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\left(1 - y^2\right)\frac{\partial}{\partial y}\right]. \tag{1.2.4}$$

Сондай-ақ, мынаған да назар аударған жөн:

$$\nabla A \cdot \nabla B = \frac{1}{x^2 - y^2}\left[\left(x^2 - 1\right)\frac{\partial A}{\partial x}\frac{\partial B}{\partial x} + \left(1 - y^2\right)\frac{\partial A}{\partial y}\frac{\partial B}{\partial y}\right] \tag{1.2.5}$$

егер ұзартылған сфероидты координаталар бойынша әр түрлі абстрактілі теңдеулерді жазғысы келген жағдайда.

(1.2.4) өрнектің түрінен (1.2.2) теңдеудің ψ шешімі сызықтық суперпозиция ретінде көрсетілуі мүмкін екендігі анық көрінетін

$$\psi = \sum_l \alpha_l Q_l(x) P_l(y) \tag{1.2.6}$$

Лежандр функциялары $l = 0$ жағдайында бізде мынадай болады

$$\psi = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right), \text{ немесе } \quad \xi = x. \tag{1.2.7}$$

Бұл жағдай Шварцшилд өрісіне сәйкес келетінін тексеруі мүмкін. Ұзындық өлшем бірлігін таңдай отырып, біз Шварцшилдтің радиалды координатасын $r = x + 1$ және бұрыштық координатасын $\cos\theta = y$ болатынын анықтай аламыз.

Ұзартылған сфероидты координаттардың тартымды ерекшелігі (1.2.4) және (1.2.5) өрнектерінің операторларының x пен y екеуіде ауыстыруға қатысты симметриялы болатындағында. Сондықтан, егер $\xi = (x, y)$ (1.1.9) теңдеуінің шешімі болса, онда $\xi = (y, x)$ үшін де солай болады. Бұл түрлендіруды Шварцшильд (1.2.7) шешіміне қолданылғанда, біз $\xi = y$ сәйкес келетін жаңа шешімге келеміз. егер $\xi = x$ және $\xi = y$ шешімдерінің сызықтық комбинациясын (1.1.9) теңдеуді қанағаттандыратын қасиетімен іздесек, келесі шешімге келуге болады:

$$\xi = x\cos\lambda + iy\sin\lambda \tag{1.2.8}$$

λ параметрі кез келген нақты мәнді қабылдай алады.

(1.2.8) шешімі Керрдің алгебралық арнайы метрикаларды іздеуде ашқан метрикаға толық сәйкес келеді. Салыстыруды жеңілдету үшін біз $\tan\lambda = a$ және $\sec\lambda = m$ енгіземіз, қашықтықтар $\left(m^2 - a^2\right)^{1/2}$ бірліктермен өлшенеді. Толық метрика кіргізілген кезде, мынадай болады:

$$ds^2 = \left[\left(r^2 + a^2 \cos^2\theta \right) \left(d\theta^2 + \frac{dr^2}{r^2 + a^2 - 2mr} \right) \right]$$

$$+ \begin{bmatrix} \left(r^2 + a^2 \right) \sin^2\theta d\phi^2 - dt^2 \\ + \dfrac{2mr}{r^2 + a^2 \cos^2\theta} \left(dt + a \sin^2\theta d\phi \right)^2 \end{bmatrix}, \tag{1.2.9}$$

мұндағы координаталар төмендегідей dd анықталады

$$r = x\left(m^2 - a^2\right)^{1/2} + m, \quad \cos\theta = y. \tag{1.2.10}$$

Бұл нәтиже мынадай түрлендіру арқылы Папапетрудың (1.1.1) канондық формасына әкелуі мүмкін

$$\rho = (r^2 + a^2 - 2mr)^{1/2} \sin\theta,$$

$$z = \left(r - m \right) \cos\theta. \tag{1.2.11}$$

Керр жариялаған формаға қол жеткізу үшін тек мына координаттарды енгізу қажет

$$u = t + \int \left(1 - \frac{2mr}{r^2 + a^2} \right)^{-1} dr,$$

$$\phi^{'} = \phi - \int \frac{adr}{r^2 + a^2 - 2mr} dr. \tag{1.2.12}$$

1.3 Пертурбациялық шешімдер

ε теңдеуі (1.2) өрнек түрінде немесе түрлендірілген (1.1.9) өрнек түрінде де өріс теңдеулерін ауытқуларды өңдеу үшін қолайлы негіз береді. Нөлдік негізде $\xi = x$ деп есептейміз. Бірінші ретті пертурбациялық түзету сызықтық дербес дифференциалдық теңдеуді қанағаттандырады.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 - 1 \right) \frac{\partial \xi_1}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\left(1 - y^2 \right) \frac{\partial \xi_1}{\partial y} = 4x \frac{\partial \xi_1}{\partial x} - 2\xi_1 \tag{1.3.1}$$

Лаплас теңдеуінен:

$$\nabla^2 \left(\partial^2 \xi_1 / \partial x^2 \right) = 0$$

алынған нәтижеге сүйене отырып, осылайша біз келесідей қорытынды жасаймыз:

$$\frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x^2} = i\sum_{l=2}^{\infty} \alpha_l Q_l(x) P_l(y).$$

Жеке өзін анықтау үші екі интегралдаудың көмегімен жүзеге асыруға болады.

$$\int Q_l(x)dx = (2l+1)^{-1}(Q_{l+1} - Q_{l-1}).$$

Нәтижесінде:

$$\xi_1 = i\sum_{l=2}^{\infty} \alpha_l \left(\iint Q_l(x)\right) P_l(y) + iay, \qquad (1.3.2)$$

біз біршама символдық түрде жазған болсақ, оның (1.3.1) теңдеудің шешімі екенін оңай көрсетуге болады. Керр көрсеткіші барлық $\alpha_l = 0$ болатын жағдайға сәйкес келеді. Осылайша, егер ұйытқу теориясы сенімді сілтеме болса, онда Керр метрикасы әлдеқайда күрделі шешімдер класында ерекше тривиальды ерекше жағдай болып көрінуі мүмкін. Қазіргі уақытта біз тиісті дәл шешімдердің бар екендігінің неғұрлым сенімді дәлелдерін әзірлеу мақсатында толқулар қатарының конвергенциясын зерттеп жатырмыз. Сонымен қатар, біз біркелкі айналатын дененің қандай сипаттамалары $l \succ 1$ типті үлестерге әкелетінін анықтауға тырысамыз.

1.4. Әдістеме, нәтижелер, талдаулар және басқа жұмыстармен салыстыру

Оссиметриялық өріс мәселесінің алдыңғы тұжырымдамаларынан қазіргі көзқарастың түбегейлі айырмашылығы мынада: сипаттамада $g_{\mu\nu}$ метрикалық тензордың нүктелік ауысу[5] тұрғысынан берілмеген, өріс ε қолданылатын бірінші канондық сипаттама болып табылады. «Бұл ε күрделі өрістің маңыздылығы осы формализммен көрсетілген барлық белгілі шешімдердің қарапайымдылығымен көрінеді. Сондықтан, прагматикалық себептерге байланысты, біз ε нің аналитикалық емес функцияларын негізгі өріс айнымалысы ретінде қолдануға өте құлықсызбыз.

Матснер мен Миснер[6] жариялаған осьтік симметриялы өрісті есептің тұжырымы қолдану тәсілі бойынша түбегейлі ерекшеленеді. Біріншіден, олардың α және β өріс айнымалылары $g_{\mu\nu}$ метрикалық тензордан нүктелік түрлендіру арқылы алынады, атап айтқанда:

$$\begin{gathered} g_{tt} = -\rho(\cos\alpha\cosh\beta + \sinh\beta) = -f, \\ g_{\phi\phi} = \rho(\cos\alpha\cosh\beta - \sinh\beta), \\ g_{\phi t} = \rho\sin\alpha\cosh\beta = f\omega. \end{gathered} \qquad (1.4.1)$$

Бұл түрлендіру қарапайым вариациялық принципке әкелсе де,

$$\delta\int\left[\left|\nabla\beta\right|^2-\cosh^2\beta\left|\nabla\alpha\right|^2\right]d\upsilon=0, \tag{1.4.2}$$

түрлендіруде ρ пайда болуы α және β ны сфералық симметрияға негізделген есеп үшін күрделі формаларды қабылдауға мәжбүр етеді.

Дегенмен, Мацнер-Мизнердің тұжырымдамасы тартымды, өйткені олардың лагранжы Лоренцтің 3-кеңістігіндегі кеңістіктік Гиперболоид үшін метрикамен байланысты. Мұндай көркем сипаттама ε өріс тұрғысынан келесідей қайта тұжырымдалса, әлдеқайда жемісті болуы мүмкін:

(1.1.12) теңдеу вариациялық принциптен туындайды.

$$\delta\int \operatorname{csc}h^2(\operatorname{Re}\nu)\nabla\nu\cdot\nabla\nu*d\upsilon=0. \tag{1.4.3}$$

Егер аналитикалық емес түрлендіруді орындайтын болса,

$$\operatorname{Im}\nu=\alpha',$$

$$\operatorname{Re}\nu=\ln\cosh(\beta'/2), \tag{1.4.4}$$

вариациялық принцип Мацнер мен Миснерге ұқсас форманы қабылдайды. Атап айтқанда:

$$\delta\int\left[\left|\nabla\beta'\right|^2-\sinh^2\beta'\left|\nabla\alpha'\right|^2\right]d\upsilon=0. \tag{1.4.5}$$

Бұл лагранжиан α', β' полярлық бұрыштары бар үш өлшемді Лоренц кеңістігіндегі уақытқа ұқсас гиперболоидтың метрикасымен байланысты. Сфералық симметрияға жақын жағдай үшін α' және β' α және β-ға қарағанда әлдеқайда қарапайым (дегенмен тіпті ε, ξ немесе ν ға қарағанда α' және β' қиынырақ). Егер осы қарапайым геометриялық принцип 1.3 бөлімде талқыланғандардан өзгеше вакуумдық өрістің теңдеулерін шешуде тиімді қолданылса, өте қызықты болар еді.

Қорыта айтқанда, ε теңдеу тұрғысынан оссимметриялық гравитациялық өріс мәселесін қайта құру біркелкі айналатын көздерге сәйкес келетін шешімдерді қарқынды зерттеуді жеңілдетеді. Нақтырақ айтсақ, Бұл метрика алгебралық тұрғыдан ерекше деген болжамнан емес, осьтік симметрия туралы болжамнан туындайтын Керр метрикасын шығаруға мүмкіндік береді.

2 ЭРЕЗ-РОЗЕН МЕН ХАРТЛ-ТОРН ШЕШІМДЕРІ

Пайдаланған әдебиеттерде көрсетілгендей [7,8] Эйнштейн өріс теңдеулерінің (ЭӨТ) бірқатар дәл және жуық шешімдері бар. Біз мұнда негізінен тек екі сыртқы шешімге тоқталамыз: Эрез-Розеннің(ЭР) дәл шешімі [9] және Хартл-Торнның (ХТ) жуық шешімі [10, 11]. Екеуі де астрофизикалық объектілердің гравитациялық өрісін сипаттайды. ЭР метрикасының шешімі дәл болсада ол тек статикалық деформацияланатын объектінің сыртқы бөлігін сипаттай алады. Өз кезегінде, НТ метрикасы жуық және күшті өріс режимінде баяу айналатын және сәл деформацияланған астрофизикалық объектілердің ішкі және сыртқы өрістерін зерттеу үшін пайдаланыла алады. Осылайша шектеулі статикалық жағдайдағы және аз деформациядағы шешімдер арасындағы байланысты көрсету қызықты.

Эрез бен Розен [9] 1959 жылы Вейл әдісін қолданып [2], өздерінің шешімін алды. Бұл көрсеткіш сфералық емес симметриялы денелердің гравитациялық өрісін сипаттауға бейімделген сферойдты координаттардың көмегімен де талданды. Бастапқыда шешімде кейбір қателіктер мен техникалық қателіктер болды және оларды Дорошкевич [12], Виникур (1968) [13] және Янг пен Култер (1969) [14] бірнеше сандық коэффициенттерге түзетті. ЭР метрикасының физикалық қасиеттерін Зельдович пен Новиков [15], содан кейін Кведедо мен Парктер [16] зерттеді. Кведедо мен Машхун (КМ) [16-21] мультиполярлық моменттерді қамтитын жалпы шешімдерді алды.

КМ шешімі – бұл айналатын деформацияланған массаның [20] гравитациялық өрісін сипаттайтын дәл сыртқы метрика, бұл Вейл-Льюис-Папапетр[3, 2, 21] классына жататын Эйнштейн вакуумдық теңдеулерінің стационар осьметриялық шешімі. Тек массалық параметрі m, квадрупол параметрі q және айналу параметрі a (массаның бірлігіне бұрыштық импульс) кіретін КМ шешімі Керр метрикасын жалпылау болып табылады [1], сондықтан ол квадруполь параметрі жоғалған $q \to 0$ кезде, ал ЭР кеңістік уақытына, айналу параметрі жойылғанда $a \to 0$ [22] Керр дәл шешіміне дейін төмендетеді. Сондай-ақ, шектеулі жағдайда Зипой-Вурхиз параметрі бар КМ шешімінің жалпы формасы, квадрупольды q параметріндегі 1-ші ретті дейінгі НТ сыртқы метрикасында және a айналу параметріндегі [8, 22] 2-ші ретті шарттарға тең екені көрсетілді.

Хартл 1967 жылы [10] өзінің алғашқы жұмысында баяу айналатын релятивисттік жұлдыздардың физикалық қасиеттерін зерттеу үшін өзінің формализмін жасады. Айналмалы жұлдыздардың тепе-теңдік конфигурациясын сипаттайтын барлық физикалық шамалар, мысалы, массаның өзгеруі, гравитациялық потенциал, эксцентриситет, байланыс энергиясы, квадруполдық момент және т.б., жұлдыздың бұрыштық жылдамдығының квадратына Ω^2 пропорционалды болды. Торнмен бірге ол релятивистік объектілер [11] үшін әр түрлі күй теңдеулерінің формализмін сынап көрді. Содан бері бұл шешім әдебиетте Хартл-Торн метрикасы ретінде берілген. Белгілі дәл шешімдерден айырмашылығы, бұл астрофизикалық контекстте релятивистік шағын объектілердің сондай-ақ ақ ергежейлілер, нейтронды жұлдыздар және гипотетикалық кварк жұлдыздардың [10-23] тепе-теңдік құрылымы мен физикалық сипаттамаларын зерттеуде көп практика жасайтын НТ шешімінің өзінің ішкі аналогы бар [24, 25], Жақында ХТ метрикасы Ω^4 жуықтауына дейін кеңейтілді [26].

Бұл бөлімнің мақсаты – ЭР мен ХТ шешімдерінің арасындағы байланысты табу және олардың шекті статикалық жағдайда және аз деформацияларда олардың эквиваленттілігін көрсету. Бұл бөлімдегі сызықтық белгілеулер (- +++) ретінде қабылданады және геометриялық бірліктер қолданылады ($G = c = 1$).

ЭР және ХТ шешімдерінің арасындағы байланыс 1991 жылы Машхун мен Тейсс тарапынан зерттеліп [27], статикалық жағдайдағы шағын деформация үшін Зипой-Вурхиз түрлендіруі қолданылған болатын [28]. Кейінірек, Фрутос-Альфаро мен Соффель статикалық жағдайда $\sim Q$ және $\sim M^2$ жуықтауларында Зипой-Вурхиз түрлендіруін қолданбай-ақ екі метрика арасындағы байланысты табуға болатынын көрсетті. Біз өз жұмысымызда Машхун мен Тейсстің туындыларын қайта қарап [29], барлық техникалық мәліметтерді егжей-тегжейлі ұсындық. Алайда, осы еңбекте біз Фрутос-Альфаро мен Соффельдің нәтижелерін қайта қарап [28], олардың физикалық маңыздылығын негіздеп, техникалық мәліметтерді ұсынамыз.[30] Бұл мақала таза ғылыми және академиялық мақсаттарды көздейді.

2.1 Эрез-Розен мен Хартл-Торн шешімдерін салыстыру

Бұл бөлімде Эйнштейннің гравитациялық өріс теңдеулерінің сыртқы шешімдері арасындағы байланыс зерттеледі, атап айтқанда, Эрез-Розен және Хартл-Торн шешімдерінің арасындағы сәйкестік зерттеліп, екі метриканың арасындағы байланысты орнату және координаталық түрлендірулерді табу жолдары көрсетіледі. Ол үшін екі метрика бірдей жуықтауда болуы және статикалық объектілердің гравитациялық өрісін сипаттауы қажет. Эрез-Розен және Хартл-Торн шешімдері жалпы шешімнің жеке жағдайлары болғандықтан, Эрез-Розен метрикасына Зипой-Вурхиз түрлендіруі қолданылып, Зипой-Вурхиз параметрі $\delta = 1 + sq$ арқылы жалпыланған шешім алынады. Героч-Хансен көпполюсті моменттері есептеліп, жалпы масса мен квадруполь моменті m массасы, q квадруполь және Зипой-Вурхиз параметрлері арқылы өрнектеледі. Координаталық түрлендірулер q жуықтауында табылады. Зипой-Вурхиз параметрі $\delta = 1 - q$, мұнда $s = 1$ екені көрсетіледі. Бұл нәтиже әдебиеттегі алдыңғы нәтижелермен сәйкес келеді.

2.1.1 Эрез-Розен метрикасы

Бұл күшті өріс режимінде [30] статикалық деформацияланған объектілердің гравитациялық өрістерін сипаттайтын массалық және квадруполды параметрлері бар дәл сыртқы шешім. Ол $x \geq 1$ және $-1 \leq y \leq 1$ болатын сфероидты координаталардағы (t, x, y, φ) статикалық осьтік симметриялық вакуумдық шешімдердің Вейл класына жатады:

$$ds^2 = e^{2\psi}dt^2 - m^2e^{-2\psi}\left[e^{2\gamma}\left(x^2-y^2\right)\left(\frac{dx^2}{x^2-1}+\frac{dy^2}{1-y^2}\right)+\left(x^2-1\right)\left(1-y^2\right)d\varphi^2\right], \qquad (2.1.1)$$

Бұл жерде ψ және γ метрикалық функциялар x және y кеңістіктік координаттарға тәуелді және тек m массалық параметрді көрсетеді. Сәйкес $R_0^0=0,\ \ R_3^3-R_2^2=0$ және R_2^3 вакуум өрісінің теңдеулер төмендегідей жазылады:

$$[(x^2-1)\psi_x]_x + [(1-y^2)\psi_y]_y = 0, \quad \psi_x = \frac{\partial\psi}{\partial x}, \quad \psi_y = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \qquad (2.1.2)$$

$$\gamma_x = \frac{1-y^2}{x^2-y^2}\left[x(x^2-1)\psi_x^2 - x(1-y^2)\psi_y^2 - 2y(x^2-1)\psi_x\psi_y\right], \qquad (2.1.3)$$

$$\gamma_y = \frac{1-y^2}{x^2-y^2}\left[y(x^2-1)\psi_x^2 - y(1-y^2)\psi_y^2 + 2x(1-y^2)\psi_x\psi_y\right], \qquad (2.1.4)$$

Эрез бен Розен тапқан шешімнің түрі мынадай [31]:

$$\psi = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)+\frac{1}{2}q(3y^2-1)\left[\frac{1}{4}(3x^2-1)\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)+\frac{3}{2}x\right], \qquad (2.1.5)$$

және

$$\begin{aligned}\gamma &= \frac{1}{2}(1+q)^2\ln\left(\frac{x^2-1}{x^2-y^2}\right)-\frac{3}{2}q(1-y^2)\left[x\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)+2\right.\\ &+\frac{9}{16}q^2(1-y^2)\left[x^2+4y^2-9x^2y^2-\frac{4}{3}+x\left(x^2+7y^2-9x^2y^2-\frac{5}{3}\right)\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right. \qquad (2.1.6)\\ &\left.+\frac{1}{4}(x^2-1)(x^2+y^2-9x^2y^2-1)\ln^2\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right].\end{aligned}$$

Алайда, қазіргі уақытта бұл теңдеулердің (2.1.2-2.1.4) жалпы тиіптерінің бір түрі болып саналады.

2.1.2 Зипой-Вурхиз түрлендіруі.

Зипой мен Вурхиз [4,32] Эйнштейн өріс теңдеулерінің статикалық, осьтік симметриялық емес вакуумдық шешімдерін зерттеді және белгілі бастапқы шешімнен жаңа шешімдер шығаруға мүмкіндік беретін қарапайым түрлендіруді ашты. Түрлендіру идеясын көрсету үшін вакуум өрісінің теңдеулерін (2.1.2-2.1.4) қолдануға болады. Бұл жағдайда, егер ψ_0 және γ_0 өріс теңдеулерінің (2.1.2-2.1.4) дәл статикалық шешімі болса, онда функцияларымен, сонымен қатар, онда $\delta = const$ болғанда $\delta\psi_0$ мен $\delta^2\gamma_0$ функциялары да өріс теңдеулерінің шешімдері болып табылады. Бұл қасиетті алғаш рет Зипой мен Вурхиз [4,32] ашқан. Бұл түрлендіру жаңа шешімдерді шығару үшін статикалық метрикаларға қолданылады. Қарапайым мысалды келесі түрлендіру арқылы көрсетуге болады:

$$\psi = \frac{\delta}{2}\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right), \ \gamma = \frac{\delta^2}{2}\ln\left(\frac{x^2-1}{x^2-y^2}\right) \tag{2.1.7}$$

бұл $\delta = 1$ болғанда Шварцшилд метрикасы ең қарапайым жалпылануы болады. δ параметр қарапайым түрде Зипой - Вурхиз параметрі деп аталады. Ол көбірек шешімдер алу үшін немесе шешімдер класын өзгерту үшін $\delta = 1 + sq$ деп таңдап, алынады. Мұндағы s нақты сан.

2.1.3 Героч-Хансен мультипольдық моменттері

Героч пен Хансеннің [33,34] бастапқы әдісін қолдана отырып релятивистік мультиполдық моменттерді дәл есептеу өте күрделі. Хансен берілген метриканың Эрнст потенциалы мен оның мультипол моменттері [1,22,33] арасындағы байланысты ашты. Мұнда біз жоғары ретті мультиполдық моменттерді есептеу үшін өте тиімді болып табылатын мынадай қатынасты ұсынамыз. Жалпы алғанда, біз стационарлық осьметриялық вакуумдық шешімдерге мысал келтіреміз. Эрнстің потенциалдары E және ξ метрикалық функциялар тұрғысынан былай анықталады:

$$E = f + i\Omega, \ \xi = \frac{1-E}{1+E} \tag{2.1.8}$$

Статикалық метрикалар үшін $f = \exp(2\psi)$ және $\Omega = 0$. Симметрия осінде $y = 1$ болғанда, $\xi = \xi(x, y)$ деп қарастырайық [13]. Кері Вейл канондық координатасы $\tilde{z}$ деп енгіземіз:

$$\tilde{z} = \frac{1}{z} = \frac{1}{\sigma xy}, \tag{2.1.9}$$

мұндағы $\sigma = const = m$ Статикалық метрикалар үшін, шексіздікте Эрнест потенциалының сипаттамасы $\tilde{z} \to 0$ шегі бойынша анықталады. Сонымен қатар, біз сәйкес түрлендірілген $\tilde{\xi}$ потенциалды анықтаймыз.

$$\tilde{\xi}(\tilde{z},1) \equiv \frac{1}{\tilde{z}}\xi(\tilde{z},1). \tag{2.1.10}$$

Хансен массаның M_l мультиполярлық моменттері мен дененің J_l бұрыштық моменттерін қарапайым қатынастың көмегімен есептеуге болатынын көрсетті:

$$M_l = \mathrm{Re}(m_l + d_l), \quad J_l = \mathrm{Im}(m_l + d_l), \tag{2.1.11}$$

мұндағы

$$m_l \equiv \frac{1}{l!} \frac{d^l \tilde{\xi}(\tilde{z},1)}{d\tilde{z}^l}\bigg|_{\tilde{z}=0} . \tag{2.1.12}$$

$d_l, l = 0,1,2,...$ екінші мүше Героч-Хансеннің бастапқы анықтамасы мен (2.1.11) теңдеуді салыстыру арқылы анықталады. Мұны $k \le l-1$ болатын m_k ның мәндерінде көрсетуге болады. Мысалы:

$$d_0 = d_1 = d_2 = d_3 = 0, \; d_4 = \frac{1}{7} m_0^*\left(m_1^2 - m_2 m_0\right), \tag{2.1.13}$$

$$d_5 = \frac{1}{3} m_0^*\left(m_2 m_1 - m_3 m_0\right) + \frac{1}{21} m_1^*\left(m_1^2 - m_2 m_0\right), \tag{2.1.14}$$

$$\begin{aligned} d_6 = {} & \frac{2}{7} m_0^*\left(4m_2^2 + 5m_3 m_1 - 9m_4 m_0\right) + \frac{4}{33} m_1^*\left(m_2 m_1 - m_3 m_0\right) \\ & + \frac{1}{231}\left(5m_2^* - 7m_0^{*2}\right)\left(m_1^2 - m_2 m_0\right)\ldots \end{aligned} \tag{2.1.15}$$

Мұндағы «*» күрделі конъюгацияны білдіреді [22]. Осылайша, M_l және J_l релятивистік мультиполдық моменттердің есебі m_l есептеуіне тағы басқада, конформды түрде өзгертілген Эрнст потенциалының туындыларына $\tilde{\xi}$ эквивалент болады.

Жоғарыда сипатталған техниканы қолдана отырып, кез келген статикалық уақыт аралығында Героч-Хансен [17,18, 28,33-36] еселігін оңай есептеуге болады. Мұнда біз оларды δ Зипой - Вурхиз параметрі [4,32] бар жалпыланған Эрез-Розен шешімі үшін есептеп мынаны аламыз [20]

$$M_{2k+1} = 0, \quad k = 0, 1, 2,..., \tag{2.1.16}$$

$$M_0 = m\delta, \; M_2 = \frac{1}{15} m^3 \delta\left(5 + 2q - 5\delta^2\right),... \tag{2.1.17}$$

Оның үстіне, біз $\delta = 1 + sq$ деп есептесек, онда

$$M_0 = m(1 + sq), \quad M_2 = \frac{1}{15} m^3 q(1 + sq)\left(2 - 10s - 5s^2 q\right),... \tag{2.1.18}$$

$s = 0$болғанда немесе балама түрде $\delta = 1$болғанда, біз бастапқы Эрез-Розен шешімі үшін көполюсті моменттерді аламыз. Егер квадруполь параметрі q

үшін тек сызықтық мүшелерді ғана ескерсек, онда (2.1.18) теңдеуі келесі түрде болады:

$$M_0 = m(1+sq), \quad M_2 = \frac{2}{15} m^3 q(1-5s)... \tag{2.1.19}$$

2.1.4 Эрез-Розен шешімін Зипой–Вурхиз параметрі арқылы өрнектеу

(2.1.1)-теңдеуден біз $x = r/m - 1$ және $y = \cos\theta$ координаттық параметрлерді қолдана отырып, ұзартылған сфероидты (t, x, y, φ) координаттарда жазылған метриканы аламыз:

$$\begin{aligned} ds^2 &= -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)[1 + 2q(\psi_1 + s\psi_0)]dt^2 \\ &+ [1 + 2q(\gamma_1 - \psi_1 + 2s\gamma_0 - s\psi_0)]\left(\frac{dr^2}{1 - \frac{2M}{r}} + r^2 d\theta^2\right) + r^2[1 - 2q(\psi_1 + s\psi_0)]\sin^2\theta d\varphi^2 \end{aligned} \tag{2.1.20}$$

мұндағы

$$\psi_0 = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right), \qquad \psi_1 = \frac{1}{2}(3y^2 - 1)\left[\frac{1}{4}(3x^2 - 1)\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) + \frac{3}{2}x\right], \tag{2.1.21}$$

тиісінше,

$$\gamma_0 = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x^2 - 1}{x^2 - y^2}\right),$$

$$\gamma_1 = \ln\left(\frac{x^2 - 1}{x^2 - y^2}\right) - \frac{3}{2}(1 - y^2)\left[x\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) + 2\right]. \tag{2.1.22}$$

$q = 0$ болатын шектеулі жағдайда, Шварцшильд шешімі ең қарапайым түрлендірілген шешім болады:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right)dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2m}{r}} + r^2 d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\varphi^2 \tag{2.1.23}$$

2.1.5 Хартл-Торнның сыртқы шешімі

Баяу айналатын жұлдыздардың тұрақты тығыздығының беттерінде сфероидтар геометриясы бар. Атап айтқанда, жұлдыздардың квадруполдық деформациясын өлшеу олардың эксцентриситеті бойынша жүргізілуі мүмкін. Баяу айналатын және әлсіз деформацияланған денелердің сыртқы гравитациялық өрісін сипаттайтын метрика - Хартл-Торн шешімі. Сфералық (t, R, Θ, φ) координаттардағы ХТ- сыртқы жуық метриканың [10, 11] жалпы көрінісі берілген:

$$ds^2 = -\left(1-\frac{2M}{R}\right)\left[1+2k_1P_2(\cos\Theta)-2\left(1-\frac{2M}{R}\right)^{-1}\frac{J^2}{R^4}\left(2\cos^2\Theta-1\right)\right]dt^2$$
$$+\left(1-\frac{2M}{R}\right)^{-1}\left[1-2\left(k_1-\frac{6J^2}{R^4}\right)P_2(\cos\Theta)-2\left(1-\frac{2M}{R}\right)^{-1}\frac{J^2}{R^4}\right]dR \qquad (2.1.24)$$
$$+R^2\left[1-2k_2P_2(\cos\Theta)\right]\left(d\Theta^2+\sin^2\Theta d\varphi^2\right)-\frac{4J}{R}\sin^2\Theta dt d\varphi,$$

k_1 және k_2 функция өрнектері

$$k_1 = \frac{J^2}{MR^3}\left(1+\frac{M}{R}\right)+\frac{5}{8}\frac{Q-J^2/M}{M^3}Q_2^2(x),$$
$$k_2 = k_1+\frac{J^2}{R^4}+\frac{5}{4}\frac{Q-J^2/M}{M^2R}\left(1-\frac{2M}{R}\right)^{-1/2}Q_2^1(x),$$

мұндағы $P_2(\cos\Theta)$ - Лежандр көпмүшелігі және

$$Q_2^1(x)=\left(x^2-1\right)^{1/2}\left[\frac{3x}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)-\frac{3x^2-2}{x^2-1}\right],$$
$$Q_2^2(x)=\left(x^2-1\right)\left[\frac{3}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)-\frac{3x^3-5x}{\left(x^2-1\right)^2}\right],$$

екінші текті байланыстырылған Лежандр функциялары. $P_2(\cos\Theta)=(1/2)\left(3\cos^2\Theta-1\right)$ Лежандр көпмүшелігі және $x=R/M-1$. бұл көрсеткіш әдебиетте Хартл-Торн метрикасы ретінде белгілі. M, J және Q тұрақтылары сәйкесінше айналатын объектінің жалпы массасы, бұрыштық моменті мен массалық квадруполдық моменті. M, J және Q дің нақты сандық мәндерін алу үшін, сыртқы және ішкі сызықтардың элементтері жұлдыздың бетінде сәйкес келуі керек [11,22,37].

Нөлдік бұрыштық момент кезінде HT шешімі мынадай ықшамдалады

$$ds^2 = -\left(1-\frac{2M}{R}\right)\left[1+2k_1P_2(\cos\Theta)\right]dt^2+\left(1-\frac{2M}{R}\right)^{-1}\left[1-2k_1P_2(\cos\Theta)\right]dR^2$$
$$+R^2\left[1-2k_2P_2(\cos\Theta)\right]\left(d\Theta^2+\sin^2\Theta d\varphi^2\right), \qquad (2.1.25)$$

мұндағы k_1 мен k_2 енді былай болды:

$$k_1=\frac{5}{8}\frac{Q}{M^3}Q_2^2(x), \quad k_2=k_1+\frac{5}{4}\frac{Q}{M^2R}\left(1-\frac{2M}{R}\right)^{-1/2}Q_2^1(x), \qquad (2.1.26)$$

ЭР шешімімен байланысты табуда (2.1.20) өрнек алынады. ХТ метрикасына арналған Героч-Хансеннің мултиполды моменттері

$$M_0 = M,\ M_2 = -Q,... \tag{2.1.27}$$

мұндағы Q Хартл анықтамасы бойынша, сығылған объектілер үшін оң, ал созылғандар үшін теріс.

2.1.6 Координаттық түрлендірулер

Екі осьтік симметриялы шешімдердің $ER(t,r,\theta,\varphi) \Rightarrow HT(t,R,\Theta,\varphi)$ сәйкестігін алу үшін оларды бір координатта жазу керек және олардың түрін келесі жолмен іздеу керек:

$$r \to R + qf_1(R,\Theta), \quad \theta \to \Theta + qf_2(R,\Theta). \tag{2.1.28}$$

мұндағы $f_1(R,\Theta)$ және $f_2(R,\Theta)$ біз іздейтін функциялар.

Тиісінше, олардың жалпы дифференциалдары келесі турде өрнектеледі:

$$dr = \frac{\partial r}{\partial R}dR + \frac{\partial r}{\partial \Theta}d\Theta = \left(1 + q\frac{\partial f_1(R,\Theta)}{\partial R}\right)dR + q\left(\frac{\partial f_1(R,\Theta)}{\partial \Theta}\right)d\Theta \tag{2.1.29}$$

$$d\theta = \frac{\partial \theta}{\partial R}dR + \frac{\partial \theta}{\partial \Theta}d\Theta = q\left(\frac{\partial f_2(R,\Theta)}{\partial R}\right)dR + \left(1 + q\frac{\partial f_2(R,\Theta)}{\partial \Theta}\right)d\Theta. \tag{2.1.30}$$

Бұл өрнектер (2.1.19) және (2.1.27), т.б., теңдеулерді ескере отырып (2.1.20) өрнекте қайтадан ауыстырылуы керек.

$$m = M(1 - sq), \quad q = -\frac{15}{2(1-5s)}\frac{Q}{M^3} \tag{2.1.31}$$

Сызықты Эрез-Розен метрикасында (2.1.17) теңдеуде s шарттарына ауыстырылуы керек.

Әрі қарай, Q квадруполь моментінде тек сызықтық мүшелерді сақтау қажет.

Бірдей координаттарда жазылған ЭР және ХТ шешімдерінің g_{tt} метрикалық тензорының уақыттық компоненттерін ғана салыстыра отырып, біз қалаған $f_1(R,\Theta)$ функцияның мәнін табамыз.

$$f_1(R,\Theta) = f_{10}(R,\Theta) + (1+s)\left[f_{11}(R) + f_{12}(R,\Theta)\right], \tag{2.1.32}$$

мұндағы

$$f_{10}(R,\Theta) = M + \frac{3}{2}M\sin^2\Theta\left[\frac{R}{M} - 1 + \frac{R}{M}\left(\frac{R}{2M} - 1\right)\ln\left(1 - \frac{2M}{R}\right)\right],$$

$$f_{11}(R)=-M\left[\frac{5}{6}+\frac{8R}{3M}-\frac{15R^2}{4M^2}+\frac{5R^3}{4M^3}-\frac{R}{M}\left(1-\frac{3R}{M}+\frac{5R^2}{2M^2}-\frac{5R^3}{8M^3}\right)\ln\left(1-\frac{2M}{R}\right)\right],$$

$$f_{12}(R,\Theta)=M\sin^2\Theta\left[\frac{5}{4}+\frac{5R}{2M}-\frac{45R^2}{8M^2}+\frac{15R^3}{8M^3}+\frac{15R^2}{4M^2}\left(1-\frac{R}{M}+\frac{R^2}{4M^2}\right)\ln\left(1-\frac{2M}{R}\right)\right].$$

Сол сияқты, ЭР және ХТ шешімдерінің $g_{\varphi\varphi}$ метрикалық тензорының азимутальды компоненттерін ғана салыстыра отырып, біз қажетті $f_2(R,\Theta)$ функцияның мәнін табамыз.

$$f_2(R,\Theta)=f_{20}(R,\Theta)+(1+s)\tan\Theta\left[f_{21}(R)+f_{22}(R,\Theta)\right], \qquad (2.1.33)$$

мұндағы

$$f_{20}(R,\Theta)=-\frac{3}{2}\cos\Theta\sin\Theta\left[2+\left(\frac{R}{M}-1\right)\ln\left(1-\frac{2M}{R}\right)\right],$$

$$f_{21}(R)=\frac{47}{12}-\frac{5R}{2M}+\frac{5R^2}{4M^2}+\left(-\frac{7}{4}+\frac{3R}{M}-\frac{15R^2}{8M^2}+\frac{5R^3}{8M^3}\right)\ln\left(1-\frac{2M}{R}\right),$$

$$f_{22}(R,\Theta)=-\sin^2\Theta\left[\frac{35}{8}-\frac{15R}{4M}+\frac{15R^2}{8M^2}-\left(\frac{15}{8}-\frac{15R}{4M}+\frac{45R^2}{16M^2}-\frac{15R^3}{16M^3}\right)\ln\left(1-\frac{2M}{R}\right)\right].$$

Біз s тың нақты мәнін табуымыз керек. Ол үшін (R,Θ) координаттарда жазылған ЭР метрикасындағы $g_{R\Theta}$ тензордың аралас компонентін нөлге теңестіреміз, себебі ол ХТ шешімінде жоқ, бұл келесі шартты береді

$$\left(1-\frac{2M}{R}\right)^{-1}\frac{\partial f_1(R,\Theta)}{\partial\Theta}+R^2\frac{\partial f_2(R,\Theta)}{\partial R}=0 \qquad (2.1.34)$$

Нәтижесінде, осы жағдайдан біз $s=-1$ болатынын табамыз. Тиісінше, мультипольдік момент мынадай болады

$$M=m(1-q),\ -Q=\frac{4}{5}m^3q,... \qquad (2.1.35)$$

ал координаттық түрлендірулер келесідей болады

$$r\to R+q\left\{M+\frac{3}{2}M\sin^2\Theta\left[\frac{R}{M}-1+\frac{R}{M}\left(\frac{R}{2M}-1\right)\ln\left(1-\frac{2M}{R}\right)\right]\right\}, \qquad (2.1.36)$$

$$\theta \to \Theta - \frac{3}{2} q \cos\Theta \sin\Theta \left[2 + \left(\frac{R}{M} - 1 \right) \ln\left(1 - \frac{2M}{R} \right) \right]. \tag{2.1.37}$$

Бұл координаттық түрлендірулерді бастапқыда Машхун және Тайсс [27] алған. Мұнда біз барлық аралық есептеулерді қоса алғанда, олардың нәтижелерін жай ғана шығардық. Сызықтық төрт полюсті моменттің жуықтауында, біздің білуімізше, екі шешім арасындағы қатынасты табудың жалғыз жолы - Зипой-Вурхиз түрлендіруін қарастыру. Алайда жақында Фрутос-Альфаро мен Соффель [38] ~ M^2 және ~ Q жуықтауында (~ M^2Q терминдерін ескермей) Зипой-Вурхиз түрлендіруінің қажет емес екенін көрсетті. Олар келесі түрлендірулерді алды

$$r \to R - \frac{1}{9} \frac{M}{R^3} Q \left[5P_2^2 - 4P_2 - 1 \right], \tag{2.1.38}$$

$$\theta \to \Theta + \frac{1}{6} \frac{M}{R^4} Q \left[5P_2 - 2 \right] \cos\Theta \sin\Theta, \tag{2.1.39}$$

мұндағы $P_2 = P_2(\cos\Theta)$ және

$$M = m, \qquad Q = -\frac{2}{15} m^3 q, \dots \tag{2.1.40}$$

Әлбетте, (2.1.38)-(2.1.39) теңдеулер шекті жағдайда да (2.1.36)-(2.1.37) теңдеулерден ерекшеленеді. Бірақ (2.1.38)-(2.1.39) теңдеулер тек ~ M^2 жуықтауында жарамды және ~ Q жуықтауында және (2.1.36)-(2.1.37) теңдеу басқа жуықтау жасалмаған кезде ~ Q жуықтауында дұрыс. Бұл координаттық түрлендірудің айқын формасы әрбір нақты жағдайда қарастырылатын жуықтаудан тәуелді екенін білдіреді.

2.2 Әртүрлі жуықтауда Эрез-Розен және Хартл-Торн метрикаларының сәйкестігі

Сондай-ақ, Бұл бөлімде Эрез–Розен дәл шешімі мен Хартл–Торн жуық шешімі статикалық жағдайда, M массаның Q квадрупольдік моментінің сызықтық жуықтауында және жалпы массаның екінші ретті жуықтауында қарастырылады. Осы мақсатта Эрез–Розен және Хартл–Торн шешімдерінің Героч–Хансен көпполюсті моменттері есептеліп, екі метриканың параметрлері арасындағы байланыс анықталады. Координаталық түрлендірулер жалпы түрде екі белгісіз функциямен, сәйкесінше $\sim Q$ және $\sim M^2$ шектерінде ізделеді. Ұйытқу теориясын қолдана отырып, Эрез–Розен жуық метрикасы Хартл–Торн метрикасымен бірдей координаталарда жазылады. Екі шешімнің метрикалық тензорының радиалды және азимуттық компоненттерін теңестіру арқылы қажетті функциялар анықталады. Мақалада қолданылған ~ Q және ~ M^2 жуықтауы физикалық тұрғыдан негізделген және пост-Ньютондық физикадағы аспан механикасының көптеген мәселелерін шешуге қолайлы екені көрсетілген. Бұл жуықтау Зипой-Вурхиз түрлендіруін пайдалануды қажет етпейді, ол $\sim Q$ жуықтауында, яғни басқа жуықтаулар жасалмаған жағдайда, қатаң математикалық талап болып табылады. Бұл координаталық түрлендірулердің нақты формасы әрбір нақты жағдайда қабылданған жуықтауға толықтай тәуелді екенін білдіреді. Алынған нәтижелер әдебиеттегі алдыңғы нәтижелермен сәйкес келеді және әртүрлі астрофизикалық мақсаттарға қолданылуы мүмкін. Мақала тек ғылыми ғана емес, сонымен қатар академиялық мақсаттарды да көздейді және жалпы салыстырмалылық теориясы, аспан механикасы және релятивистік астрофизика бойынша арнайы курстарға қосымша материал ретінде пайдаланылуы мүмкін.

Эрез-Розен метрикасы Эйнштейн теңдеулерінің дәл шешімі болып саналады және статикалық, осьтік симметриялы астрофизикалық нысандардың сыртқы гравитациялық өрісін сипаттайды, ал Хартл-Торн метрикасы Эйнштейн теңдеулерінің жуық шешімі болып есептеледі, ол баяу айналатын және аздап деформацияланған астрофизикалық нысандардың ішкі және сыртқы гравитациялық өрісін сипаттайды. Бұл бөлімде алға қойылған мақсатқа жету үшін Хартл-Торнның сыртқы метрикасы тек статикалық жағдайда қарастырылды. Жоғарыда көрсетілген шешімдер арасында қатынас орнату үшін олар бірдей жуықтау және айналу болмағанда, дәлірек айтқанда, сызықтық квадрупольдік момент Q және толық масса квадраты M^2 жуықтауында қарастырылды. Хартл-Торн метрика координаталарында Эрез-Розен метрикасын жазу үшін алдымен Героч-Хансен мультипольдік моменттері есептелді, инвариантты моменттерді анықтау екі метрика параметрлері арасында байланыс орнатуға мүмкіндік берді. Содан кейін Эрез-Розен метрикасы Хартл-Торн метрикасының параметрлері Q, M арқылы жазылды және оның жуықтау өрнегі $\sim Q$ және $\sim M^2$ жуықтауында алынды. Әрі қарай, f_1 және f_2 екі белгісіз функциялары бар жалпы түрдегі координаттық түрлендіруді қолдану арқылы қарастырылған жуықтауда Эрез-Розен метрикасы Хартл-Торн метрикасының координатасында жазылды. Осыдан кейін екі шешімнің метрикалық тензорының радиалды және азимуталды құраушыларын теңестіре отырып, f_1 және f_2 функциялары айқындалды. Осылайша Эрез-Розен мен Хартл-Торн шешімі арасындағы байланысты анықтайтын координаттық түрлендірудің жуық өрнегі анықталды. Осы бөлімде қолданылған $\sim Q$ және $\sim M^2$ жуықтауы физикалық және постньютондық физикада аспан механикасының көптеген мәселелерін шешуге қолайлы екенін атап өткен жөн. Бұл жуықтау Зипой-Вурхиз түрлендіруіне жүгінбеуге мүмкіндік береді. Себебі Зипой-Вурхиз түрлендіруі $\sim Q$ жуықтауында, яғни, басқа ешқандай жуықтау ескерілмеген кезде қажетті қатаң математикалық талап болып саналады. Бұл координаттық түрлендірудің айқын түрі толығымен әрбір нақты жағдайда қолданылатын жуықтауға байланысты болады дегенді білдіреді.

2.2.1 Эрез-Розен және Хартл-Торн метрикаларының $\sim Q$ және $\sim M^2$ жуықтаудағы сәйкестігі

ЭР жуық метрикасын алу үшін m және q мәндерін M және Q арқылы өрнектейміз, сәйкесінше (2.1.16) және (2.1.17) қатынастарын төмендегідей теңестіреміз:

$$m = M\,,\; q = -\frac{15}{2}\frac{Q}{M^3} \tag{2.2.1}$$

және $\sim Q$ және $\sim M^2$ өрнектері үшін шегін тауып, оларды Тейлор қатарымен жіктейміз, тек Q және M^2 мүшелерін сақтап, $Q\ M^2$ сияқты мүшелерді елемейміз. $x = \dfrac{r}{m} - 1$ және $y = \cos\theta$ (ескеру керек нәрсе) ескере отырып, соңғы нәтиже сфералық координаттар (t, r, θ, ϕ) түрінде жазылады.

$$\begin{aligned}
ds^2 = &\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{2QP_2(\cos\theta)}{r^3} + \frac{2MQP_2(\cos\theta)}{r4}\right)dt^2 \\
&- \left(1 + \frac{2M}{r} + \frac{2M^2}{r^2} - \frac{2QP_2(\cos\theta)}{r^3} - \frac{2MQ(5P_2{}^2(\cos\theta) + 11P_2(\cos\theta) - 1}{3r^4}\right)dr^2 \\
&- r^2\left(1 - \frac{2QP_2(\cos\theta)}{r^3} - \frac{2MQ(5P_2{}^2(\cos\theta) + 5P_2(\cos\theta) - 1}{3r^4}\right)d\theta^2 \\
&- r^2\sin^2\theta\left(1 - \frac{2QP_2(\cos\theta)}{r^3} - \frac{6MQP_2(\cos\theta)}{r^4}\right)d\varphi^2
\end{aligned} \tag{2.2.2}$$

Статикалық нысандар үшін НТ метрикасын алу үшін біз $J = 0$ мәнін орнатып, $x = \dfrac{r}{m} - 1$. және $y = \cos\theta$ координаттық параметрлерді ескере отрып, оның $\sim Q$ және $\sim M^2$ жуықтауы арқылы табамыз. Осылайша, стандартты сфералық координаттардағы (t, R, Θ, ϕ) НТ метрикасы

$$\begin{aligned}
ds^2 = &\left(1 - \frac{2M}{R} + \frac{2QP_2(\cos\Theta)}{R^3} + \frac{2MQP_2(\cos\Theta)}{R^4}\right)dt^2 \\
&- \left(1 + \frac{2M}{R} + \frac{4M^2}{R^2} - \frac{2QP_2(\cos\Theta)}{R^3} - \frac{10MQP_2(\cos\Theta)}{R^4}\right)dR^2 \\
&- R^2\left(1 - \frac{2QP_2(\cos\Theta)}{R^3} - \frac{5P_2(\cos\Theta)}{R^4}\right)\left(d\Theta^2 + \sin^2\Theta d\phi^2\right)
\end{aligned} \tag{2.2.3}$$

2.2.2 Эрез-Розен метрикасынан Хартл-Торн метрикасына өтетін координаттық түрлендірулер

Координаталары (t, r, θ, ϕ) болатын ЭР шешімі мен координаталары (t, R, Θ, ϕ) болатын ХТ шешімі арасындағы сәйкестікті алу үшін, екі шешім де бірдей координатада жазылуы керек. Сондықтан біз келесі түрдегі координаттық түрлендіруін іздейміз:

$$r \to R + \frac{MQ}{R^3} f_1(\Theta) \qquad (2.2.4)$$
$$\theta \to \Theta + \frac{MQ}{R^4} f_2(\Theta)$$

Мұндағы $f_1(\Theta)$ және $f_2(\Theta)$ - қажетті белгісіз функциялар. $\sim Q$ және $\sim M^2$ жуықтауды ескере отырып f_1 және f_2 функциялары тек Θ-ге тәуелді. Координаталардың жалпы дифференциалдары мына өрнекпен анықталады:

$$dr = \frac{\partial r}{\partial R} dR + \frac{\partial r}{\partial \Theta} d\Theta = \left(1 - \frac{3MQ}{R^4} f_1(\Theta)\right) dR + \frac{MQ}{R^3}\left(\frac{\partial f_1(\Theta)}{\partial \Theta}\right) d\Theta \qquad (2.2.5)$$

$$d\theta = \frac{\partial \theta}{\partial R} dR + \frac{\partial \theta}{\partial \Theta} d\Theta = \left(-\frac{4MQ}{R^4} f_2(\Theta)\right) dR + \left(1 + \frac{MQ}{R^4}\frac{\partial f_2(\Theta)}{\partial \Theta}\right) d\Theta \qquad (2.2.6)$$

Бұл өрнектерді ЭР жуық шешіміне (2.1.19) ауыстыру керек. Сонда тек $\sim Q$ және $\sim M^2$ мәндері сақталуы керек. Осылайша, біз бірдей параметрлері бар ХТ шешімімен бірдей координаттардағы ЭР жуық метрикасын аламыз.

$$\begin{aligned}
ds^2 = &\left(1 - \frac{2M}{R} + \frac{2QP_2(\cos\Theta)}{R^3} + \frac{2MQP_2(\cos\Theta)}{R^4}\right) dt^2 \\
&- \left(1 + \frac{2M}{R} + \frac{4M^2}{R^2} - \frac{2QP_2(\cos\Theta)}{R^3} - \frac{2MQ(5P_2{}^2(\cos\Theta) + 11P_2(\cos\Theta) - 9 f_1(\Theta) - 1}{3R^4}\right) dR^2 \\
&- R^2\left(1 - \frac{2QP_2(\cos\Theta)}{R^3} - \frac{2MQ(5P_2(\cos\Theta)(1 + P_2(\cos\Theta)) + 3(f_1(\Theta) - f_2{}'(\Theta) - 1)}{R^4}\right) d\Theta^2 \qquad (2.2.7) \\
&+ \left(\frac{2MQ(f_1{}'(\Theta) - 4 f_2(\Theta))}{R^4}\right) d\Theta dR \\
&- R^2 \sin^2\Theta \left(1 - \frac{2QP_2(\cos\Theta)}{R^3} - \frac{2MQ(3P_2(\cos\Theta) + f_1(\Theta) + f_2(\Theta)\cot\Theta)}{R^4}\right) d\phi^2
\end{aligned}$$

Сонымен қатар, (R, Θ) координатасында жазылған ЭР (2.2.7) және ХТ (2.2.4) жуық шешімдерінің де метрикалық тензорының g_{RR} сәйкес компоненттерін теңестіре отырып, біз $f_1(\Theta)$ функциясының өрнегін табамыз, ал $g_{\varphi\varphi}$ метрикалық тензорының азимутальды компоненттерін ғана салыстыра отырып, біз қажетті $f_2(\Theta)$ функцияның мәнін табамыз:

$$f_1(\Theta) = \frac{2MQ(5P_2^{\ 2}(\cos\Theta) - 4P_2(\cos\Theta) - 1}{9} \tag{2.2.8}$$

$$f_2(\Theta) = \frac{1}{6}(2 - 5P_2(\cos\Theta))\cos\Theta\sin\Theta \tag{2.2.9}$$

Осылайша, егер біз осы функцияларды (R, Θ) координаталарында жазылған ЭР жуық шешімінің (2.2.7) метрикалық тензорының $g_{R\Theta}$ аралас компонентіне қоссақ, біз күткендей $g_{R\Theta}$ жоғалады.

3 ЖАЛПЫ САЛЫСТЫРМАЛЫҚ ТЕОРИЯСЫНДА ДЕНЕЛЕР ҚОЗҒАЛЫСЫНЫҢ АДИАБАТТЫҚ ТЕОРИЯСЫ

Көптеген жағдайларда нақты астрофизикалық объектілер айналады және олардың пішіні сферадан өзгеше болады. Сондықтан, нақты объектілердің гравитациялық өрісіндегі сынақ бөлшектердің қозғалысын қарастырғанда, бастапқы дененің айналуын және деформациясын ескеру қажет. Бұл дененің геометриясын қарастырудың ыңғайлы тәсілі – оның көпполюсті моменттерін зерттеу, олардың ішіндегі ең маңыздысы – масса M, бұрыштық момент J және квадруполь момент Q. Вакуумдағы статикалық, сферикалық-симметриялық объектіге арналған өріс теңдеулерінің шешімі әдебиетте Шварцшильд метрикасы ретінде белгілі [43]. Бұл шешім классикалық Ньютондық гравитация теориясы арқылы түсіндіруге келмейтін жаңа эффектілерді сипаттайды [44, 45]. 1918 жылы Лензе мен Тирринг бұрыштық моменттің бірінші ретті шамасына дейінгі айналуды есепке алатын сыртқы жуық шешімді шығарды [46]. Олардың жұмысына сәйкес, айналу қосымша гравитациялық өріс тудырады, ол инерциялық санақ жүйелерінің сүйретілуіне (Лензе-Тирринг эффекті) әкеледі. 1959 жылы Эрез және Розен квадруполь параметрін ескере отырып, статикалық, аксиалды симметриялық объектіге арналған шешімді шығарды [9]. Алайда, бұрыштық моментті де, квадруполь моментті де есепке алатын алғашқы жуық шешімді 1968 жылы Хартл мен Торн тапты [10, 11]. Бұл шешім негізгі тізбек жұлдыздарынан бастап нейтрондық және кварктік жұлдыздарға дейінгі астрофизикалық объектілердің сыртқы гравитациялық өрісін зерттеуге мүмкіндік береді [47]. Айта кету керек, Эйнштейн өріс теңдеуінің бірнеше вакуумдық дәл шешімдері бар, олар электр заряды, дилатондық заряд, скалярлық өрістер сияқты қосымша параметрлермен жоғары ретті көпполюсті моменттерді есепке алады [48–51]. Алайда, қарапайымдылық үшін бұл жұмыста біз Хартл-Торнның жуық шешіміне назар аударамыз және сынақ бөлшектердің қозғалысын адиабаттық теория шеңберінде зерттейміз.

Әбділдин [52, 53] ЖСТ - да сынақ бөлшектердің қозғалысын зерттеудің қызықты тәсілін Фок [54] әзірлеген концептуалды негізді пайдалана отырып, ұсынған. Мақалада [52] Фок метрикасы дененің айналуын (бұрыштық импульс бойынша екінші ретке дейін) және оның ішкі құрылымын пост-ньютондық ($1/c^2$) жуықтауында қарастыру үшін жалпыландырылған, мұндағы c – вакуумдағы жарық жылдамдығы. Бұл кеңейтілген Фок метрикасы траекторияларға байланысты векторлар пайдалану арқылы сынақ бөлшектерінің қозғалысын зерттеуді жеңілдететін бастапқы гармоникалық координаттарда ұсынылған. Әбділдин жұмыстарының маңызды нәтижелерінің бірі денелердің қозғалысын ЖСТ - да [53] зерттеу үшін адиабаттық теорияны қолдану болды, ол бұрын [55, 56] алынған қозғалыс теңдеулерінің формасын күрт жеңілдетеді. Бұл жұмыста біз айналмалы деформацияланатын объектінің гравитациялық өрісіндегі сынақ бөлшектерінің қозғалысы үшін бұл артықшылықты нақты көрсетеміз.

Ядролық бөлшектердің кванттық механикасы мен физикасы контексінде енгізілген адиабаттық теория жүйенің лагранждық немесе гамильтонды бұзу және кейбір қосымша параметрлердің баяу өзгеруіне мүмкіндік беру идеясына негізделген. адиабаттық теорияның әр түрлі аспектілері физиканың термодинамика, химия, классикалық және кванттық механика сияқты көптеген салаларында қолданылған [57].

Классикалық жалпы салыстырмалылық контекстінде сынақ бөлшектердің қозғалысын зерттеудің қызықты тәсілін М.Әбділдин [52] белгілі бір статикалық кеңістік-уақыт метрикасы мен Фок [58] әзірлеген концептуалды негізді пайдалану арқылы ұсынған болатын[2], Фок метрикасы бұрыштық моменттегі дененің екінші ретке дейін айналуын және пост-Ньютондық ($\sim 1/c^2$) жуықтауда оның ішкі құрылымын қосу үшін жалпыланған, мұндағы с – вакуумдағы жарық жылдамдығы. Бұл кеңейтілген Фок метрикасы бастапқыда гармоникалық координаттарда [58, 59] ұсынылған, ол сынақ бөлшектерінің траекторияларымен байланысты векторларды пайдалану арқылы сынақ бөлшектерінің қозғалысын зерттеуді жеңілдетеді.

Әбділдин еңбектерінің маңызды нәтижелерінің бірі денелердің қозғалысын ЖСТ - да зерттеудің адиабаттық теориясының жүзеге асырылуы болды, бұл бұрын алынған қозғалыс теңдеулерінің формасын күрт жеңілдетеді [52, 53]. Бұл жұмыста біз адиабаттық теорияның негізгі идеялары мен физикалық аспектілерін ұсынып, оның жеткілікті жалпы есептердегі қолданылуы мен қарапайымдылығын атап өтеміз. Бұл артықшылықтарды нақты көрсету үшін біз шынайы айналатын нысанның гравитациялық өрісіндегі сынақ бөлшектерінің қозғалысын зерттейміз.

Бақылауларға сәйкес, барлық астрофизикалық шоғырлы және шағын нысандар қандай да бір осьтің айналасында айналады. Мұндай объектілердің гравитациялық өрісіндегі сынақ бөлшектерінің қозғалысын зерттеу олардың негізгі қасиеттерін түсінуге, күшті өріс режимінде релятивистік әсерлерді тексеруге және айналатын объектілердің айналасындағы кеңістік уақытының геометриялық құрылымын зерттеуге мүмкіндік береді.

Вакуумдағы статикалық, сфералық симметриялы объект үшін Эйнштейн өріс теңдеулерінің шешімі әдебиетте Шварцшильд метрикасы ретінде белгілі [43]. Бұл шешім классикалық Ньютондық гравитация теориясы аясында түсіндірілмейтін жаңа әсерлерді сипаттайды [44].

1918 жылы Лензе және Тирринг бұрыштық импульсте бірінші ретке дейін дененің айналуын ескеретін шамамен сыртқы шешімді шығарды [46,60]. Айналу статикалық және стационарлық кеңістік уақыттарының айырмашылығын анықтайды және ерекше гравитациялық әсерлерге әкеледі. Ең көрнектісі айналмалы дененің жанындағы кадрды тарту эффектісі болып табылады, ол орталық объектінің айналу осі айналасында экваторлық емес жазықтықта спутниктердің орбиталары мен гироскоптарының прецессиясы ретінде көрінеді [45].

Қозғалмайтын, остік симметриялы және асимптотикалық тегіс гравитациялық өріс үшін бірінші дәл вакуумдық шешімді 1963 жылы Керр шығарған [1]. Шешім жұлдыздық массалық қара құрдымдардан белсенді галактикалық ядролардағы аса шоғырлы қара құрдымдарға дейін әртүрлі массалық таралулардың гравитациялық өрісін сипаттау үшін сәтті қолданылды [61].

Кейінірек, 1968 жылы Эрнст Эйнштейн өріс теңдеулерін тікелей шешпей, күрделі потенциалды енгізу арқылы Папапетроу сызқты элементіне негізделген жаңа стационар, осьсимметриялық және асимптоталық жалпақ шешімдерді алу барысын жасады [35]. Бұл әдіс жаңа дәл шешімдерге әкелді, олардың ішінде Керр шешімі ең қарапайым жағдай болды [62]. Керр метрикасының физикалық шынайы ішкі шешімі болмағанына қарамастан, ол астрономия мен астрофизикада қара құрдымдың физикасын және олардың маңында болып жатқан процестерді зерттеу үшін кеңінен қолданылады [63 – 70]. Бұл жұмыста [71,72] біз Керрдің жуық шешіміне тоқталып, адиабаттық теория шеңберінде сынақ бөлшектерінің қозғалысын зерттейміз.

3.1 Ньютон механикасындағы векторлық элементтер

Кеплердің міндеті, яғни потенциалдық энергия r-ге кері пропорционал және сәйкесінше күш r^2-ге кері пропорционал болатын орталық тартылыс өрісіндегі сынақ бөлшектің қозғалысы туралы мәселе оңай шешіледі, егер бірден екі векторлық қозғалыс интегралынан бастасақ:

$$\vec{M} = [\vec{r}\vec{p}], \vec{A} = \left[\frac{\vec{p}}{m}\vec{M}\right] - \frac{\gamma m m_0}{r}\vec{r}, \tag{3.1.1}$$

мұндағы $\bar{M}$-импульс моменті, А-Лаплас векторы

Шынында да, М векторының сақталуынан орбитаның жазық қисық екендігі көрінеді.

(3.1.2)-теңдеуінің екі жағын r-ге скаляр көбейту арқылы алатынымыз:

$$\left(\vec{r}\vec{A}\right) = \left\langle \vec{r}\left[\frac{\vec{p}}{m}\right]\vec{M}\right\rangle - \gamma m m_0 r, \tag{3.1.2}$$

немесе:

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\varphi}, \tag{3.1.3}$$

бұл жерде:

$$p = \frac{M^2}{\gamma m^2 m_0}, e = \frac{A}{\gamma m m_0}, a = \gamma m m_0 \tag{3.1.4}$$

Бұл өрнектерде Р-орбита параметрі, е-орбита эксцентриктілігі, φ – полярлық бұрыш.

Теңдеудің өзі (3.1.3) – конустық қиманың координаттардың басында фокус. Осылайша, мәселе шешілді.

Сақталған $\bar{A}$ векторы үлкен ось бойымен фокустан перигелияға бағытталған.

Осы потенциалдың алдындағы кез келген белгісі бар $U = \frac{\gamma m_0}{r}$ өрісіне тән осындай қозғалыс интегралының пайда болуы қозғалыс дегенерациясымен байланысты [71].

Егер жүйенің жалпы энергиясы E<0 болса, онда эксцентриктілік e < 1, яғни орбита эллипс болып табылады және берілген қозғалыс шексіз. Үлкен және кіші осьтер үшін эллипстің формулалары:

$$a = \frac{p}{1-e^2} = \frac{a}{2|E|}, b = \frac{P}{\sqrt{1-e^2}} = \frac{M}{\sqrt{2m|E|}} \tag{3.1.5}$$

Энергияның ең кіші рұқсат етілген мәні келесі формуламен анықталады:

$$E_{\min} = -\frac{ma^2}{2M^2} \tag{3.1.6}$$

Бұл ретте, арақатынасына сәйкес

$$e = \sqrt{1 + \frac{2EM^2}{ma^2}} \tag{3.1.7}$$

эксцентриктілік e = 0, яғни эллипс шеңберге айналады. Эллипстің үлкен жартылай осі тек энергияға байланысты, бірақ сынақ бөлшектің сәтіне байланысты емес екенін ескереміз.Т қозғалыс кезеңі арақатынастарды қанағаттандырады:

$$2mf = TM, T = 2\pi a^{3/2}\sqrt{\frac{m}{a}} = \pi a\sqrt{\frac{m}{2|E|^3}} \tag{3.1.8}$$

мұндағы $f = \pi ab$ – орбитаның ауданы

3.2 Квази-Кеплер есебі

Орталық өрістегі, яғни сынақ бөлшектің потенциалдық энергиясы тек $\bar{r}$ қашықтығына байланысты болатын өрістегі қозғалыс туралы жалпы мәселені талқылаудан бастайық. Мұндай өрісте қозғалу кезінде өрістің ортасына қатысты жүйенің моменті сақталады:

$$\vec{M} = [\bar{r}\bar{p}] \tag{3.2.1}$$

Бұл орталық өрістегі сынақ бөлшектің траекториясы толығымен бір жазықтықта орналасқанын білдіреді. Оған полярлық координаталарды енгізу арқылы $\bar{r}$ және φ Лагранж функциясын келесідей жазамыз:

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) - U(r) \tag{3.2.2}$$

Онда нақты түрде φ координаты жоқ, ол бұл жағдайда циклдік болып табылады және оған сәйкес импульс сақталады.

$$p_{\varphi} = M = mr^2\dot{\varphi} = const. \tag{3.2.3}$$

Орталық өрістегі сынақ бөлшектің қозғалысы туралы мәселені шешуді қозғалыс теңдеулерін өздері жазбай-ақ, момент пен энергияның сақталу заңдылықтарына сүйене отырып алуға болады. Энергияның сақталу заңы келесі түрде жазылады:

$$E = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) + U(r) \tag{3.2.4}$$

(3.2.4) ϕ -ді қою арқылы алатынымыз:

$$E = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{M^2}{2mr^2} + U(r) \tag{3.2.5}$$

әрі қарай

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}\left[E - U(r)\right] - \frac{M^2}{m^2r^2}} \tag{3.2.6}$$

Айнымалыларды бөлу және біріктіру арқылы біз жаза аламыз

$$t = \int \frac{dr}{\frac{2}{m}\left[E - U(r)\right] - \frac{M^2}{m^2r^2}} + const \tag{3.2.7}$$

(3.2.4)-ден біз мынаны табамыз

$$d\varphi = \frac{M}{mr^2}dt \tag{3.2.8}$$

Мұнда (3.2.7)-бойынша dt-ны қойып,интегралдап алатынымыз:

$$\varphi = \int \frac{\frac{M}{r^2}dr}{\sqrt{2m\left[E - U(r)\right] - \frac{M^2}{r^2}}} + const \tag{3.2.9}$$

(3.2.8) және (3.2.10) формулалары орталық өрістегі сынақ бөлшектің қозғалысы туралы мәселенің жалпы шешімін береді. Бұл жағдайда (3.2.10) R және φ айнымалылары, яғни траектория теңдеуі арасындағы байланысты анықтайды. (3.2.8) Өрнегі уақыттың функциясы ретінде қозғалатын сынақ бөлшектің ортасынан R қашықтығын анық емес түрде анықтайды. Уақыт өте келе φ бұрышы монотонды түрде өзгереді, ал $\dot{\varphi}$ (3.2.4) көрсеткендей, белгісін ешқашан өзгертпейді. Қозғалыстың радиалды бөлігін “тиімді” потенциалдық энергиясы бар өрістегі бір өлшемді қозғалыс ретінде қарастыруға болады.

$$U_{Эфф} = U(r) + \frac{M^2}{2mr^2}. \tag{3.2.10}$$

$\frac{M^2}{2mr^2}$ – орталықтан тепкіш энергия деп аталады.

Егер энергияны сақтау заңында (3.2.6) $\dot{r} = 0,$ болса, онда

$$E = U(r) + \frac{M^2}{2mr^2} \tag{3.2.11}$$

Бұл өрнек қозғалыс шекараларын орталықтан қашықтықпен анықтайды. Бұл жағдайда $\dot{r} = 0$ шарты траекторияның "айналу нүктесін" анықтайды, онда функция $\dot{r}(t)$ өсуден азая бастайды және керісінше.

Егер r өзгеру аймағында $r_{\min}$ және екі шек $r_{\max}$ арасы болса , онда [71] сәйкес қозғалыс финит болып табылады және траектория толығымен $r_{\min} = r$ және $r_{\max} = r$ радиусы бар шеңберлермен шектелген сақина ішінде болады.

Бұл траектория міндетті түрде жабық қисық дегенді білдірмей $r_{\min} - r$-ден $r_{\min}$-ге дейін, содан кейін $r_{\max}$-ке дейін өзгеретін уақыт ішінде радиус векторы $\Delta\varphi$ бұрышына тең болады (3.2.8),

$$\Delta\varphi = 2\int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{\frac{M}{r^2}dr}{\sqrt{2m(E-U)} - \frac{M^2}{r^2}}. \tag{3.2.12}$$

Траекторияның оқшаулану шарты – бұл бұрыш 2π ұтымды бөлігіне тең, яғни, $\Delta\varphi = 2\pi m/n$ түрінде болады, мұндағы m, n – бүтін сандар.

Финиттік қозғалыстардың барлық траекториялары жабық болатын орталық өрістердің тек екі түрі бар. Бұл өрістер потенциалдық энергияның $\frac{1}{r}$ немесе r^2-қа пропорционал жағдайларын сипаттайды. Бірінші өріс Кеплер есебіне сәйкес келеді, ал екінші өріс кеңістіктік осциллятор деп аталатын есеп жағдайында орын алады.

Енді біздің орталық өрістегі қозғалыс туралы жалпы ой-пікіріміз нақтыланады және сынақ бөлшектің потенциалдық энергиясы пайда болған кезде мәселені қарастырамыз:

$$U(r) = -\frac{a}{r} + \delta U(r), \tag{3.2.13}$$

мұндағы $\delta U(r)$ - бұл кішкене қосымша. Мұндай тапсырманы Квази-Кеплер тапсырмасы деп атауға болады. Бұл жағдайда финиттік қозғалыстың траекториялары жабылмайды және орбиталық перигелияның әр айналымында $\delta\varphi$ кіші бұрыштық мәнге ауысады.

Сонымен (3.2.12) - ге сәйкес:

$$\Delta\varphi = 2\int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{\frac{M}{r^2}dr}{\sqrt{2m(E-U) - \frac{M^2}{r^2}}} = -2\frac{\partial}{\partial M}\int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \sqrt{2m(E-U) - \frac{M^2}{r^2}}dr, \tag{3.2.14}$$

мұнда (3.2.13)-ді орнына қойып. Әрі қарай есептеу үшін өрнекті алдын ала қарастырамыз:

$$\sqrt{2m(E-U) - \frac{M^2}{r^2}} = \sqrt{2m\left(E + \frac{a}{r} - \delta U(r)\right) - \frac{M^2}{r^2}} \approx$$
$$\approx \sqrt{2m\left(E + \frac{a}{r}\right) - \frac{M^2}{r^2}} - \frac{m\delta U(r)}{\sqrt{2m\left(E + \frac{a}{r}\right) - \frac{M^2}{r^2}}} \tag{3.2.15}$$

Мұны (3.2.14)-ке ауыстырамыз, содан кейін бізде:

$$\Delta\varphi = \frac{\partial}{\partial M}\int_{r_{\min}}^{r^{\max}} \frac{2m\delta U(r)dr}{\sqrt{2m\left(E + \frac{a}{r}\right) - \frac{M^2}{r^2}}} = \frac{\partial}{\partial M}\left(\frac{2m}{M}\int_0^{\pi} r^2\delta U(r)d\varphi\right), \tag{3.2.16}$$

dr интеграциясынан біз "ұйтқымаған" Кеплер қозғалысының траекториясы бойымен $d\varphi$ интеграциясына көштік. Бұл үшін келесі жазба (3.2.16) қызығушылық тудырады. Ол үшін (3.2.9) формуласын еске түсірейік:

$$d\varphi = \frac{M}{mr^2}dt \qquad (3.2.17)$$

Мұны (3.2.17) алмастыра отырып, бізде алатынмыз:

$$\Delta\varphi = \frac{\partial}{\partial M}\int_0^T \delta U(r)dt \qquad (3.2.18)$$

Эллипс "бүтін" ретінде айналатындықтан, оған бұрыштық жылдамдықты (мысалы, перигелий ығысу жылдамдығын) Ω жазуға болады:

$$\Delta\varphi = \Omega \cdot T, \qquad (3.2.19)$$

$$\Omega = \frac{\partial}{\partial M}\int_0^T \delta U(r)dt. \qquad (3.2.20)$$

T кезеңі тек E қозғалысының тәуелсіз интегралына байланысты.

Қорытындылай келе, біз тағы бірнеше формуланы келтіре аламыз E . қозғалысының тәуелсіз интегралы Кеплер қозғалысы жағдайында (3.2.5) көретініміз:

$$E = -\frac{\alpha}{2a}, \qquad (3.\ 2.20)$$

мұндағы a -эллипстің үлкен жартылай өсі. Жаңа M_0 мәнін келесідей енгіземіз:

$$a = \frac{M_0^2}{ma} \qquad (3.2.21)$$

Бұл жағдайда M_0^2 "әрекет" өлшеміне ие. Сонда:

$$E = -\frac{ma^2}{2M_0^2} \qquad (3.31)$$

(3. 2.7)-формуласына қойып алатынымыз:

$$M_0 = \frac{M}{\sqrt{1-\frac{A^2}{a^2}}}. \qquad (3.2.23)$$

Осылайша, M_0 қозғалыс интегралы арасында болуы E энергиясының сақталу заңымен және қозғалысының M және A интегралдарымен анықталады. Соңында, орташа қозғалыс деп аталатын формуланы аламыз [72]:

$$\frac{2\pi}{T}=\frac{ma^2}{M_0^3}=\frac{\partial E}{\partial M_0} \tag{3.2.24}$$

Жоғарыдағы (3.2.20), (3.2.23) және (3.2.24) формулалар жалпы салыстырмалылық механикасында денелер қозғалысының адиабаттық теориясын құруда маңызды рөл атқарады.

3.3 Шварцшильд есебі

Орталық дененің гравитациялық өрісіндегі ЖСТ-да сынақ бөлшектің массасы M үшін қозғалыс есебі Шварцшильд есебі деп аталады [73,74]. Жалпы, бұл мәселе Шварцшильд метрикасына негізделген геодезиялық сызық теңдеулерін интегралдау немесе Гамильтон-Якоби теңдеулерін шешу арқылы қарастырылады. Бұл бөлімде барлық есептеулер импульс моменті мен Лаплас векторларын пайдалана отырып, Шварцшильд метрикасының негізінде орташа әдіспен жүргізіледі [73].

Әдебиетте әртүрлі координаталық жүйелерде жазылған Шварцшильд метрикасының бірнеше нұсқалары бар. Дегенмен, ол астрофизикалық есептерде кеңінен қолданылады: стандартты координаталар, изотропты координаталардың әртүрлі түрлері және гармоникалық координаталардың нұсқалары. Физикалық тұрғыдан алғанда, бұл нұсқалардың бір-біріне қарағанда артықшылығы немесе кемшілігі жоқ. Алайда, белгілі бір математикалық операцияларды орындау кезінде олардың біреуі екіншісіне қарағанда тиімдірек болуы мүмкін [75].

Стандарт координаттар жүйесінде Шварцшильд метрикасы келесі түрде беріледі:

$$ds^2=\left(1-\frac{2\mu}{r_s}\right)c^2dt^2-\frac{dr_s^{\,2}}{1-\dfrac{2\mu}{r_s}}-r_s^{\,2}\left(d\theta^2+\sin^2 d\varphi^2\right) \tag{3.3.1}$$

мұндағы, $\mu=\frac{\gamma m_0}{c^2}$, $r=r_s$, γ – гравитациялық тұрақты, m_0 – орталық дененің массасы, r – радиалдық координат, c – жарықтың вакуумдағы жылдамдығы. Изотроптық координаттар жүйесінде $r=r_i$ метрика мына түрге ие болады:

$$ds^2=\frac{\left(1-\dfrac{\mu}{2r_i}\right)^2}{\left(1+\dfrac{\mu}{2r_i}\right)^2}c^2dt^2-\left(1+\frac{\mu}{2r_i}\right)^4\left(dr_i^{\,2}+r_i^{\,2}d\theta^2+r_i^{\,2}\sin^2\theta d\varphi^2\right) \tag{3.3.2}$$

Гармониялық координаттар жүйесінде $r=r_h$:

$$ds^2 = \frac{r_h - \mu}{r_h + \mu} c^2 dt^2 - \frac{r_h + \mu}{r_h - \mu} dr_h{}^2 - (r_h + \mu)^2 \left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right) \tag{3.3.3}$$

Шварцшильд метрикасының үш нұсқасы өзара радиал координат арқылы мына түрде байланысқан:

$$r = r_s = r_h + \mu = \left(1 + \frac{\mu}{2r_i}\right)^2 r_i \tag{3.3.4}$$

Біздің жағдайда Шварцшильд есебін шығару мақсатында метрика гармониялық координаттар жүйесінде $1/c^2$ жуықтауында жазылады:

$$ds^2 = \left(c^2 - 2U + \frac{2U^2}{c^2}\right)dt^2 - \left(1 + \frac{2U}{c^2}\right)\left(dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\varphi^2\right) \tag{3.3.5}$$

Мұндағы (ct, r, θ, φ) – уақыттық және кеңістіктік координаттар, U – сфералық-симметриялы орталық дененің сыртқы Ньютондық гравитациялық потенциалы:

$$U = U(r) = \frac{\gamma m_0}{r}. \tag{3.3.6}$$

Есепті шығару үшін [73,74,76,77] әдебиетте ұсынылған әдісті пайдаланамыз. Ол әдіс орбитаның векторлық элементтерін қолдануға негізделген:

$$\overrightarrow{M} = \left[\vec{r}, \vec{p}\right], \tag{3.3.7}$$

$$\vec{A} = \left[\frac{\vec{p}}{m}, \vec{M}\right] - \frac{\gamma m m_0}{r}\vec{r} \tag{3.3.8}$$

мұндағы, $\vec{M}$ – сынақ бөлшектің орбиталдық импульс моменті, $r = |\vec{r}|$ – радиус вектордың модулі, $\vec{p}$ – сынақ бөлшектің импульсі, $\vec{A}$ – Лаплас векторы, $\vec{M}$ -нің бағыты орбита жазықтығына перпендикуляр, ал $\vec{A}$ перигелийге қарай бағытталған. Шварцшильд есебінде $\vec{i}$ векторын Лаплас векторымен бағыттас, k векторын $\vec{M}$ векторымен бағыттас етіп алған ыңғайлы. Лаплас векторының модулі $A = \gamma m m_0 e$ өрнегі арқылы анықталады, мұндағы e орбитаның эксцентриситеті. Векторлық элементтердің уақыт бойынша өзгерісі:

$$\dot{\vec{M}} = \left[\dot{\vec{r}}, \vec{p}\right] + \left[\vec{r}, \dot{\vec{p}}\right], \tag{3.3.9}$$

$$\dot{\vec{A}} = \left[\frac{\dot{\vec{p}}}{m}, \vec{M}\right] + \left[\frac{\vec{p}}{m}, \dot{\vec{M}}\right] - \gamma m m_0 \frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right). \tag{3.3.10}$$

$\dot{\vec{r}}$ және $\dot{\vec{p}}$ туындаларын Гамильтонның канондық теңдеулері арқылы есептейміз [78]:

$$\dot{\vec{r}} = \frac{\partial H}{\partial \vec{p}} = \frac{dH}{dp}\frac{\vec{p}}{p}, \tag{3.3.11}$$

$$\dot{\vec{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \vec{r}} = -\frac{dH}{dr}\frac{\vec{r}}{r}.$$

Ал, Гамильтон функциясын табу үшін ds -ті $1/c^2$ жуықтауында есептеп, келесі амалдарды орындау керек:

$$ds^2 = c^2 dt^2 \left\{\left[1 - \frac{2U}{c^2} + \frac{2U^2}{c^4}\right] - \left(1 + \frac{2U}{c^2}\right)\frac{(d\vec{r})^2}{c^2 dt^2}\right\} = \left|\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)^2 = (\vec{v})^2 = v^2\right|, \tag{3.3.12}$$

$$ds = cdt\sqrt{1 - \frac{2U}{c^2} + \frac{2U^2}{c^4} - \left(1 + \frac{2U}{c^2}\right)\frac{v^2}{c^2}} \tag{3.6.13}$$

Метрика $1/c^2$ жуықтауында берілгендіктен (3.6.13) өрнегін Тейлор қатарына жіктейміз, ол үшін төменде көрсетілген формуланы қолданамыз:

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \ldots. \tag{3.3.14}$$

ds өрнегі келесі түрде жазылады:

$$ds = cdt\left\{1 - \frac{U}{c^2} - \frac{v^2}{2c^2} + \frac{U^2}{2c^4} - \frac{3Uv^2}{2c^4} - \frac{v^4}{8c^4}\right\} \tag{3.3.15}$$

.

Сынақ бөлшектің Лагранж функциясы метрика арқылы төмендегідей өрнектеледі [79]:

$$L = -mc\frac{ds}{dt} = -mc^2 + mU + \frac{mv^2}{2} - \frac{mU^2}{2c^2} + \frac{3mUv^2}{2c^2} + \frac{mv^4}{8c^2} \tag{3.3.16}$$

.

Жалпылама импульсті Лагранж функциясынан есептеп аламыз, ол мында түрде болады:

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \frac{dL}{dv}\frac{\vec{v}}{v} = \left(1 + \frac{3U}{c^2} + \frac{v^2}{2c^2}\right)m\vec{v} \tag{3.3.17}$$

Осыдан жалпылама жылдамдық:

$$\vec{v} = \left(1 - \frac{3U}{c^2} - \frac{p^2}{2m^2c^2}\right)\frac{\vec{p}}{m}. \tag{3.3.18}$$

Гамильтон функциясын табу үшін белгілі өрнекті пайдаланамыз:

$$H = (\vec{p} \cdot \vec{v}) - L \tag{3.3.19}$$

(3.3.16) мен (3.3.18) өрнектерін (3.3.19) теңдеуіне қойып:

$$H = mc^2 - mU + \frac{p^2}{2m} - \frac{3Up^2}{2mc^2} + \frac{mU^2}{2c^2} - \frac{p^4}{8m^3c^2} \tag{3.3.20}$$

Шварцшильд есебі үшін Гамильтон функциясын аламыз. Гамильтонның канондық теңдеулері арқылы $\dot{\vec{r}}$ және $\dot{\vec{p}}$ есептейміз:

$$\dot{\vec{r}} = \vec{v} = \left(1 - \frac{3U}{c^2} - \frac{p^2}{2m^2c^2}\right)\frac{\vec{p}}{m} \tag{3.3.21}$$

$$\dot{\vec{p}} = \left(1 - \frac{U}{c^2} + \frac{3p^2}{2m^2c^2}\right)m\frac{\partial U}{\partial \vec{r}} \tag{3.3.22}$$

мұндағы,

$$\frac{\partial U(r)}{\partial \vec{r}} = \frac{dU(r)}{dr}\frac{\vec{r}}{r} = -\frac{\gamma m_0}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} \tag{3.3.23}$$

.

Егер (3.3.21) және (3.3.22) ескерсек, векторлық элементтердің уақыт бойынша өзгерісі:

$$\dot{\vec{M}} = [\dot{\vec{r}}, \vec{p}] + [\vec{r}, \dot{\vec{p}}] = 0 \tag{3.3.24}$$

мұнда $\dot{\vec{M}}$ нөлге тең болады, $\dot{\vec{M}}$ $\dot{\vec{M}}=0$ болуы орбиталық моменттің сақталатынын және қозғалыстың жазық екенін көрсетеді, ал $\dot{\vec{A}}$ есептеу үшін келесі түрлендірулерді жасаймыз:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right)=\frac{\dot{\vec{r}}}{r}+\vec{r}\,\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\right) \tag{3.3.25}$$

мұндағы,

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{r}=-\frac{1}{r^2}\frac{dr}{dt}=-\frac{1}{r^2}\frac{d}{dt}\sqrt{(\vec{r}\cdot\vec{r})}=-\frac{1}{2r^2}(\vec{r}\cdot\vec{r})^{-\frac{1}{2}}2\left(\vec{r}\cdot\dot{\vec{r}}\right)=-\frac{\left(\vec{r}\cdot\dot{\vec{r}}\right)}{r^3}$$

нәтижесінде:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right)=\frac{\dot{\vec{r}}}{r}-\frac{\vec{r}(\vec{r}\cdot\dot{\vec{r}})}{r^3} \tag{3.3.26}$$

(3.3.21) – ді (3.3.26) – ға қойып келесі өрнекті аламыз:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right)=-\left(1-\frac{3U}{c^2}-\frac{p^2}{2m^2c^2}\right)\frac{\left[\vec{r},\vec{M}\right]}{mr^3} \tag{3.3.26}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right)=-\left(1-\frac{3U}{c^2}-\frac{p^2}{2m^2c^2}\right)\frac{\left[\vec{r},\vec{M}\right]}{mr^3} \tag{3.3.27}$$

(3.3.22), (3.3.24) және (3.3.27) ескерсек, (3.3.10) өрнектегі $\vec{A}$ векторының уақыт бойынша өзгерісі шығады:

$$\dot{\vec{A}}=\frac{d\vec{A}}{dt}=-\frac{2\gamma m_0}{c^2}\left(U+\frac{p^2}{m^2}\right)\frac{\left[\vec{r},\vec{M}\right]}{r^3}. \tag{3.3.28}$$

Осы өрнекті сынақ бөлшектің классикалық (релятивтік емес) толық энергиясы арқылы жазсақ:

$$\dot{\vec{A}}=-\frac{2\gamma m_0}{c^2}\left(\frac{2E}{m}+3U\right)\frac{\left[\vec{r},\vec{M}\right]}{r^3} \tag{3.3.29}$$

мұндағы,

$$E=\frac{p^2}{2m}-mU \tag{3.3.30}$$

$E-$ сынақ бөлшектің толық энергиясы [76]. (3.3.28) және (3.3.29) теңдеулері векторлық элементтер арқылы жазылғандықтан қарапайым, әрі көрнекті. Осыдан Кеплерлік эллипстің перигелийі уақыт бойынша өзгеретінін байқауға болады. Мұнда $1/c^2$ көбейткіштің әсерінен $\dot{\vec{A}}$ өте баяу өзгеретін шама. Осы шаманың үлкен (ғасырлық) уақыт аралығында өзгерісін зерттеу үшін сынақ бөлшектің айналу периоды Т бойынша орташалаймыз. Ол үшін кез келген физикалық шаманың орташа мәнін табу анықтамасын қолданамыз:

$$\langle f \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt\,. \tag{3.3.31}$$

мұнда ескеретін жайт, (3.3.29) өрнекті орташалау барысында классикалық толық энергияның сақталатын тұрақты шама екенін ұмытпау керек. Сонымен, келесі шаманы орташалаймыз:

$$\overline{\frac{\vec{r}}{r^3}} = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{\vec{r}}{r^3}dt = ? \tag{3.3.32}$$

ол үшін релятивтік емес қозғалыс моментінің сақталу заңын пайдаланамыз [76]:

$$M = mr^2\dot{\varphi} \tag{3.3.33}$$

осы жерден уақытты бұрыш арқылы өрнектеп аламыз:

$$dt = \frac{mr^2}{M}d\varphi\,. \tag{3.3.34}$$

Осылайша, уақыт бойынша интегралды бұрыш бойынша интегралға алмастырып жазамыз

$$\overline{\frac{\vec{r}}{r^3}} = \frac{1}{T}\int_0^{2\pi} \frac{\vec{e}_r}{r^2}\frac{mr^2}{M}d\varphi = \frac{m}{TM}\int_0^{2\pi}\vec{e}_r d\varphi \tag{3.3.35}$$

мұндағы,

$$\vec{r} = r\vec{e}_r\,, \qquad r = \frac{P}{1+e\cos\varphi}\,, \tag{3.3.36}$$
$$0 < \varphi < 2\pi$$

P – кеплерлік орбитаның параметрі, қозғалыс жазық болғандықтан біз тек xy жазықтығын қарастырамыз, яғни $\vec{r}$ -дің тек қана екі құраушысы болады, φ – полярлық бұрыш, ал бірлік вектор $\vec{e}_r$ төмендегідей жазылады:

$$\vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{r} = \frac{\vec{i}x + \vec{j}y}{r} = \frac{\vec{i}r\cos\varphi + \vec{j}r\sin\varphi}{r} = \vec{i}\cos\varphi + \vec{j}\sin\varphi \tag{3.3.37}$$

онда төмендегі интеграл нөлге тең болады

$$\int_0^{2\pi} \left(\vec{i}\cos\varphi + \vec{j}\sin\varphi\right) d\varphi = 0. \tag{3.3.38}$$

Сәйкесінше,

$$\overline{\frac{\vec{r}}{r^3}} = \frac{1}{T}\int_0^{2\pi} \frac{\vec{e}_r}{r^2}\frac{mr^2}{M} d\varphi = \frac{m}{TM}\int_0^{2\pi} \vec{e}_r d\varphi = 0 \tag{3.3.39}$$

,

$$\overline{\frac{\vec{r}}{r^4}} = \frac{1}{T}\int_0^{T} \frac{\vec{r}}{r^4} dt = \frac{1}{T}\int_0^{2\pi} \frac{\vec{r}}{r^4}\frac{mr^2}{M} d\varphi = \frac{m}{TM}\int_0^{2\pi} \frac{\vec{e}_r}{r} d\varphi = \frac{\pi me}{TMP}\vec{i}\ . \tag{3.3.40}$$

Жоғарыдағы өрнектерді есептеу барысында (3.3.31) төмендегідей түрленеді:

$$\langle f \rangle = \frac{1}{T}\int_0^{T} f(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\frac{dt}{d\varphi} d\varphi = \frac{m}{TM}\int_0^{2\pi} f(\varphi) r^2 d\varphi . \tag{3.3.41}$$

Егер (3.3.29) орташалау қажет болса, онда кеплерлік эллипс үшін импульсті жылдамдық арқылы өрнектеп алып орташа мәнді есептейміз. Бұл жағдайда кеплерлік жылдамдық (3.3.33) және (3.3.36) өрнектері арқылы анықталады:

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \frac{M}{mP}\left\{-\sin\phi\vec{i} + \left(e + \cos\phi\right)\vec{j}\right\} \tag{3.3.42}$$

Бұл өрнек бізге төмендегі интегралды есептеуге мүмкіндік береді:

$$\overline{\frac{p^2\vec{r}}{m^2r^3}} = \overline{\frac{v^2\vec{r}}{r^3}} = \frac{m}{TM}\int_0^{2\pi} \frac{v^2\vec{r}}{r^3} r^2 d\varphi = \frac{2\pi eM}{mTP^2}\vec{i} = \frac{2\pi\gamma mm_0 e}{TMP}\vec{i} \tag{3.3.43}$$

Мұнда орбитаның параметрі мен моменттің арасындағы мынандай классикалық қатынас қолданылды:

$$\frac{M^2}{P} = \gamma m^2 m_0 . \tag{3.3.44}$$

Нәтижесінде (3.3.28) және (3.3.29) келесі түрде жазылады:

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{6\pi\gamma m_0}{TPc^2}\left[\vec{e}_M , \vec{A}\right] \tag{3.3.45}$$

мұндағы,

$$\vec{e}_M = \frac{\vec{M}}{M} = \vec{k} , \tag{3.3.46}$$

$$\vec{A} = A\vec{e}_A = \gamma m m_0 e\vec{i} \ , \vec{e}_A = \vec{i} \ .$$

Бұл жердегі $\vec{A}$ векторы шамасы бойынша емес, бағыты бойынша өзгереді және (3.3.45) формулаға сәйкес $\vec{M}$ -ді ху орбита жазықтығында $\vec{\Omega}$ бұрыштық жылдамдықпен айналады:

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \left[\vec{\Omega}, \vec{A}\right], \quad \vec{\Omega} = \frac{6\pi\gamma m_0}{TPc^2}\vec{e}_M . \tag{3.3.47}$$

Егер $\vec{A}$ векторының орнын орбита жазықтығында A және g полярлық координаттар арқылы сипаттайтын болсақ, онда (3.3.47)-тен келесі өрнекті аламыз:

$$\frac{dg}{dt} = \left(\vec{\Omega} \cdot \vec{e}_M\right) = \frac{6\pi\gamma m_0}{TPc^2} \tag{3.3.48}$$

мұндағы, (1) $P = a(1-e^2)$ – орбитаның параметрі, a – эллипстің үлкен жарты ось. g полярлық бұрыштың Т период бойынша өзгерісі келесі өрнекке тең болады:

$$\Delta g = \Omega T = \frac{6\pi\gamma m_0}{a(1-e^2)c^2} \tag{3.3.49}$$

Бұл ғаламшардың перигелий ығысуы үшін белгілі формула [76,78,80,81]. Сәйкесінше Шварцшильд есебінде перигелий ығысу туралы мәселе дұрыс түсіндіріледі.

3.4 Лензе-Тирринг есебі және релятивистік эффектердің суперпозиция принципі

Айналмалы массивтік шардың өрісіндегі материалдық бөлшектердің шектеулі қозғалысы туралы есепті алғаш рет Лензе мен Тирринг зерттеген [82, 426 бет]. Олардың бастапқы метрикасы:

$$ds^2 = \left[c^2 - 2U + \frac{2U^2}{c^2}\right]dt^2 - \left(1 + \frac{2U}{c^2}\right)\left(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2\right) + \\ + \frac{8}{c^2}\left(U_1 dx_1 + U_2 dx_2 + U_3 dx_3\right)dt. \tag{3.4.1}$$

Біз қазір бұл мәселені бірінші жуықтаудың бірнеше қысқартылған метрикасы негізінде қарастырамыз:

$$ds^2 = \left[c^2 - 2U + \frac{2U^2}{c^2}\right]dt^2 - \left(1 + \frac{2U}{c^2}\right)\left(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2\right) + \\ + \frac{8}{c^2}\left(U_1 dx_1 + U_2 dx_2 + U_3 dx_3\right)dt. \tag{3.4.2}$$

Біз U_i-ны анықтаймыз және оны шарға қарағанда жалпы жүйе үшін, атап айтқанда белгілі бір соңғы аймақта тұрақты қозғалатын денелер жүйесін сипаттау үшін жасаймыз. Сонда:

$$\vec{U} = \gamma \int \frac{(\rho \vec{v})}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} dV' = \gamma \sum_{,b} \frac{m_b V_b}{|\vec{r} - \vec{r}_b|} \tag{3.4.3}$$

ескере кетейік:

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_b|} = \frac{1}{r} + \frac{(\vec{r}\vec{r}_b)}{r^3} + ..., \tag{3.4.4}$$

$$(\vec{r}\vec{r}_b)\vec{v}_b = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\vec{r}_b(\vec{r}_b\vec{r}) + \frac{1}{2}\left[\vec{r}\left[\vec{v}_b\vec{r}_b\right]\right], \tag{3.4.5}$$

(3.4.3) өрнекті қайта жазсақ:

$$\vec{U} = \frac{\gamma}{r}\frac{d}{dt}\sum_b m_b \vec{r}_b + \frac{\gamma}{2r^3}\frac{d}{dt}\sum_b \vec{r}_b(\vec{r}_b\vec{r}) + \frac{\gamma}{2r^3}\sum_b m_b\left[\vec{r}\left[\vec{v}_b\vec{r}_b\right]\right]. \tag{3.4.6}$$

Бұл өрнекті уақыт бойынша өзгертсек. Сонда:

$$\vec{U} = -\frac{\gamma}{2r^3}\left[\vec{r}\vec{s}_0\right] = \frac{\gamma}{2}\left[\nabla\frac{1}{r}\vec{s}_0\right], \tag{3.4.7}$$

белгілеу енгізілген жерде:

$$\vec{s}_0 = \sum_b \left[\vec{r}_b m_b \vec{v}_b\right], \tag{3.4.8}$$

бұл жүйенің қозғалыс моменті үшін.
Енді біз осы мәселе үшін Лагранж функциясын құрамыз:

$$L = -mc\frac{ds}{dt}. \tag{3.4.9}$$

Ол үшін (3.4.2)-дан табуымыз керек:

$$ds = cdt\left(1 - \frac{U + \frac{v^2}{2}}{c^2} + \frac{\frac{1}{2}U^2 - \frac{3}{2}Uv^2 - \frac{1}{8}v^4 + 4\left(\vec{U}\vec{v}\right)}{c^4}\right). \tag{3.4.10}$$

(3.4.9)-ті (3.4.10)-ке ауыстыру арқылы алатынымыз:

$$L = -mc^2 + m\left(U + \frac{v^2}{2}\right) - \frac{m}{2c^2}\left(U^2 - 3Uv^2 - \frac{1}{4}v^4 + 8\left(\vec{U}\vec{v}\right)\right). \tag{3.4.11}$$

Импульс келесі формуламен анықталады:

$$\vec{P} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \left(1 + \frac{3U + \frac{v^2}{2}}{c^2}\right)m\vec{v} - \frac{4m}{c^2}\vec{U}. \tag{3.4.12}$$

Гамильтониан:

$$H = \vec{v}\frac{\partial L}{\partial \vec{v}} - L = mc^2 + \frac{mv^2}{2} - mU + \frac{m}{2c^2}\left(U^2 + 3Uv^2 + \frac{3}{4}v^4\right) + \frac{4\left(\vec{P}\vec{U}\right)}{c^2} = \tag{3.4.13}$$
$$= mc^2 + \frac{p^2}{2m} - mU + \frac{mU^2}{2c^2} - \frac{3UP^2}{2mc^2} - \frac{P^4}{8m^3c^2} + \frac{4(\vec{P}\vec{U})}{c^2}.$$

Қозғалыс теңдеулерін құрамыз. (3.3.4) және (3.3.5)-ке сәйкес:

$$\dot{\vec{M}} = [\dot{\vec{r}}\vec{p}] + [\vec{r}\dot{\vec{p}}], \tag{3.4.14}$$

$$\dot{\vec{A}} = \left[\frac{\dot{\vec{p}}}{m}\vec{M}\right] + \left[\frac{\vec{p}}{m}\dot{\vec{M}}\right] - \gamma m m_0 \frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right) \tag{3.4.15}$$

әрі қарай, біз мынаны табамыз:

$$\dot{\vec{r}} = \frac{\vec{p}}{m} - \frac{3U\vec{p}}{mc^2} - \frac{p^2\vec{p}}{2m^3c^2} + \frac{4\vec{U}}{c^2}, \tag{3.4.16}$$

$$\dot{\vec{p}} = -\frac{\gamma m m_0}{r^3}\vec{r} - \frac{mU}{c^2}\frac{\partial U}{\partial \vec{r}} + \frac{3p^2}{2mc^2}\frac{\partial U}{\partial \vec{r}} - \frac{4}{c^2}\frac{\partial}{\partial \vec{r}}(\vec{p}\vec{U}), \tag{3.4.17}$$

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right) = \left(1 - \frac{3U}{c^2} - \frac{p^2}{2m^2c^2}\right)\frac{[\vec{M}\vec{r}]}{mr^3} - \frac{4}{c^2r^3}[\vec{r}[\vec{r}\vec{U}]]. \tag{3.4.18}$$

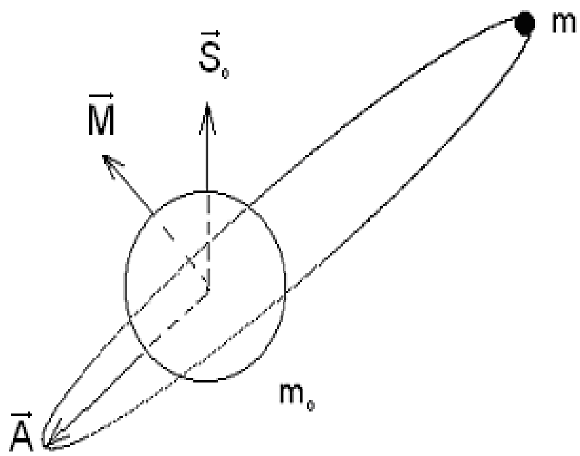
Біз (3.4.16)-(3.4.18)-ні (3.4.14) және (3.4.15)-ке алмастырамыз. Сонда бізде:

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \frac{2\gamma}{c^2r^3}[\vec{s}_0\vec{M}], \tag{3.4.19}$$

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = -\frac{\gamma m_0(4E + 6mU)}{mc^2r^3}[\vec{r}\vec{M}] + \frac{2\gamma}{c^2r^3}[\vec{s}_0\vec{A}] + \frac{6\gamma(\vec{s}_0\vec{M})}{mc^2r^5}[\vec{r}\vec{M}]. \tag{3.4.20}$$

Ньютон эллипсіне сәйкес (3.4.19) және (3.4.20)-ті өзгертеміз. [82, 426 Б.] - Жұмысында эллиптикалық орбитада қозғалыс кезінде R уақытқа тәуелділіктің параметрлік көрінісі арқылы өзгеріс жасау ыңғайлы екендігі көрсетілген:

$$r = a(1 - \cos\xi), t = \frac{T}{2\pi}(\xi - e\sin\xi), \tag{3.4.21}$$



Сурет 3.4.1 – Лензе-Тирринг есебі жағдайында векторлық элементтердің бағыттарының схемалық бейнесі.

мысалы:

$$\overline{\frac{1}{r^3}} = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{dt}{r^3} = \frac{1}{2\pi a^3}\int_0^{2\pi} \frac{d\xi}{(1-e\cos\xi)^2}. \qquad (3.4.22)$$

Осы және ұқсас интегралдарды есептеу үшін біз жалпы формуланы қолданамыз [83, Б. 397].

$$J_{n+1} = \int_0^{2\pi} \frac{d\xi}{(1-e\cos\xi)^{n+1}} = \frac{2\pi}{\left(1-e^2\right)^{\frac{n+1}{2}}} p_n\left(\frac{1}{\sqrt{1-e^2}}\right), \qquad (3.4.23)$$

мұндағы P_n – Легендра көпмүшесі. Сондай-ақ:

$$p_0(x) = 1,\ p_1(x) = x,\ p_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2-1),\ p_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3-3x), \qquad (3.4.24)$$
$$p_4(x) = \frac{1}{8}\left(35x^4-30x^2+3\right), \ldots$$

(3.4.23) формуланы ескере отырып, мынаны табамыз:

$$\overline{\frac{1}{r^3}} = \frac{1}{a^3\left(1-e^2\right)^{3/2}}. \qquad (3.4.25)$$

Бұл бөлімде өзгеріс қозғалыс мөлшерін сақтау сәтінің релятивистік емес заңын қолдануға негізделген одан да қарапайым түрде жасалады. Тағы да $\frac{1}{r^3}$ орташа мәнін қарастырамыз. Содан кейін (3.3.33) және (3.3.33) ескере отырып, бізде:

$$\overline{\frac{1}{r^3}} = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{dt}{r^3} = \frac{m}{TM}\int_0^{2\pi}(1+e\cos\varphi)d\varphi. \tag{3.4.26}$$

Бұл интеграл қарапайым және оны есептеу үшін арнайы типтегі (3.4.23) формуласы қажет емес .

$$\overline{\frac{1}{r^3}} = \frac{m}{TMP}2\pi. \tag{3.4.27}$$

Бұл өрнек (3.4.25)-ке сәйкес келуі үшін, Кеплер есебін еске түсірейік:

$$TM = 2mf,\ f = \pi ab, b = a\sqrt{1-e^2},\ p = a(1-e^2), \tag{3.4.28}$$

тағы бір еске салсақ, f орбитаның ауданы, b -эллипстің кіші жартылай ось. Сонда:

$$\overline{\frac{1}{r^3}} = \frac{\pi}{fp} = \frac{1}{abp} = \frac{1}{a^3(1-e^2)^{3/2}} \tag{3.4.29}$$

Шварцшильд алдыңғы мәлімдемесінен бізге белгілі:

$$\overline{\frac{\vec{r}}{r^3}} = 0, \overline{\frac{\vec{r}}{r^4}} = \frac{e}{2a^3(1-e^2)^{3/2}}\vec{i}. \tag{3.4.30}$$

Соңында,

$$\overline{\frac{\vec{r}}{r^5}} = \frac{m}{TM}\int_0^{2\pi}\frac{\vec{e}_r d\varphi}{r^2} = \frac{2\pi me}{TMP^2}\vec{i} = \frac{e}{a^4(1-e^2)^{5/2}}\vec{i}. \tag{3.4.31}$$

Табылған орташа мәндерді ескере отырып, (3.4.19) және (3.4.20) қозғалыс теңдеулерін жазайық:

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = [\vec{\Omega}_M \vec{M}], \tag{3.4.32}$$

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = [\vec{\Omega}_A \vec{A}]. \tag{3.4.33}$$

Мұнда бұрыштық жылдамдықтар енгізілді:

$$\vec{\Omega}_M = \frac{2\gamma \vec{s}_0}{c^2 a^3 \left(1-e^2\right)^{3/2}}, \qquad (3.4.34)$$

$$\vec{\Omega}_A = \frac{\gamma}{c^2 a^3 \left(1-e^2\right)^{3/2}} \left[\frac{3m_0}{m} \vec{M} + 2\left(\vec{s}_0 - 3\left(\vec{s}_0 \vec{e}_M\right)\vec{e}_M\right) \right], \qquad (3.4.35)$$

мұндағы $\vec{s}_0$ – -доптың меншікті бұрыштық моменті.

$\vec{\Omega}_M$ және $\vec{\Omega}_A$ екі шаманың орнына жалпы бұрыштық жылдамдықты қарастыруға болады:

$$\vec{\Omega} = \vec{\Omega}_A, \qquad (3.4.36)$$

(3.4.32) және (3.4.33) қайта жазсақ:

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \left[\vec{\Omega}\vec{M}\right]. \qquad (3.4.37)$$

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \left[\vec{\Omega}\ \vec{A}\right]. \qquad (3.4.38)$$

Демек, $\vec{M}$ – және $\vec{A}$ – векторлары шамада емес, бағытта өзгереді. $\vec{M}$ – векторы $\vec{s}_0$ – айналасында бұрыштық жылдамдықпен жүреді (3.4.34). $\vec{A}$ – векторы бірден екі қозғалысқа қатысады: бұрыштық жылдамдықпен $\vec{s}_0$ – айналасындағы прецессияда (3.4.34) және бұрыштық жылдамдықпен орбиталық жазықтықта айналуда:

$$\vec{\Omega}_g = \frac{\gamma}{c^2 a^3 \left(1-e^2\right)^{3/2}} \left[\frac{3m_0}{m} \vec{M} - 6\left(\vec{s}_0 \vec{e}_M\right)\vec{e}_M \right]. \qquad (3.4.39)$$

(3.4.29)-ке сәйкес:

$$\frac{\gamma}{a^3 \left(1-e^2\right)^{3/2}} = \frac{2\pi\gamma m\left(\vec{s}_0 \vec{e}_M\right)}{TMPc^2} \vec{e}_M. \qquad (3.4.40)$$

Онда

$$\vec{\Omega}_g = \frac{6\pi\gamma m_0}{TPc^2} \vec{e}_M - \frac{12\gamma m\left(\vec{s}_0 \vec{e}_M\right)}{TMPc^2} \vec{e}_M. \qquad (3.4.41)$$

Бұл өрнектің оң жағындағы бірінші мүше Шварцшильд есебіндегі бұрыштық жылдамдыққа сәйкес келеді (3.3.29), ал екінші мүше – орталық дененің айналуына байланысты түзету. (3.4.39) көріп отырғанымыздай, орталық өрістің ньютонсыздығымен және дененің өзіндік айналуымен байланысты релятивистік әсерлер өте күрделі. Осылайша, бұл әсерлерді бір-біріне тәуелсіз зерттеуге болады (суперпозиция принципі). Қорытындылай келе, x_0, y_0, z_0 қозғалмайтын жүйеге қатысты x, y, z қозғалатын координат жүйесінің бағдарын анықтайтын $\delta, g, i,$ Эйлер бұрыштарының уақыт туындыларымен байланысты екенін байқаймыз. Сонда [60]

$$\vec{\Omega} = \dot{\delta}\vec{e}_{z0} + \dot{i}\vec{e}_{\delta} + \dot{g}\vec{e}_{z}, \tag{3.4.42}$$

Мұндағы $\bar{e}_\delta$ және xy, $x_0 y_0$ жазықтықтарының қиылысуынан пайда болатын түйін сызығының бірлік векторы . Егер z_0 өсі $\vec{s}_0$ бағытталса, онда (3.4.42) және (3.4.35) салыстыру арқылы алатынымыз:

$$\dot{\delta} = \frac{2\gamma s_0}{c^2 a^3 \left(1 - e^3\right)^{3/2}}, \tag{3.4.43}$$

$$\dot{i} = 0, \tag{3.4.44}$$

$$\dot{g} = \frac{\gamma}{c^2 a^3 \left(1 - e^2\right)^{3/2}} \left[\frac{3m_0}{m} M - 6\left(\vec{s}_0 \vec{e}_M\right)\right]. \tag{3.4.45}$$

Бір периодтағы g-дің өзгерісі мынаған тең:

$$\Delta g = \frac{6\pi\gamma m_0}{a\left(1 - e^2\right)Mc^2} - \frac{12\pi\gamma m\left(\vec{s}_0 \vec{e}_M\right)}{a\left(1 - e^2\right)Mc^2}. \tag{3.4.46}$$

Сәйкесінше:

$$\Delta\delta = \frac{4\pi\gamma m s_0}{a\left(1 - e^2\right)Mc^2}. \tag{3.4.47}$$

$\vec{s}_0 \uparrow\uparrow \vec{M}$ болған жағдайда, яғни егер сынақ бөлшектің қозғалысы орталық дененің экваторлық жазықтығында жүрсе, перигелий абсолютті ығысуын табуға болады [85, б. 35]:

$$\Delta g = \frac{6\pi\gamma m_0}{a\left(1 - e^2\right)Mc^2} - \frac{12\pi\gamma m\left(\vec{s}_0 \vec{e}_M\right)}{a\left(1 - e^2\right)Mc^2}. \tag{3.4.48}$$

3.5 Лензе-Тиррингтің есебі және адиабаттық қозғалыс теориясы

Бұл атау ЖСТ механикасындағы эволюциялық қозғалысты зерттеу үшін біз жасаған тәсілді білдіреді[86,87,88,89,90]. Аталған әдіс қозғалысты сипаттау үшін векторлық элементтерді және адиабаттық инварианттар әдісін қолдануға негізделген.

Мұны түсіндірейік. ЖСТ-дағы денелер қозғалысының адиабаттық теориясы көптеген маңызды есептерді зерттеуге негізделген, онда зерттелетін жүйелерді баяу дамып келе жатқан Гамильтон жүйелері деп санауға болады. Басқаша айтқанда, ЖСТ механикасының бірқатар есептерін Кеплердің қозғалысына ұйытқу ретінде қарастырылады. Олар үшін Лагранж функциясы:

$$L = -mc^2 + \frac{m\nu^2}{2} + \frac{\gamma m m_0}{r} + R(\vec{r}, \vec{\vartheta}), \tag{3.5.1}$$

ал Гамильтониан:

$$H = mc^2 + \frac{p^2}{2m} - \frac{\gamma m m_0}{r} - R(\vec{r}, \vec{p}), \tag{3.5.2}$$

мұндағы R-пертурбациялық функция $\approx \frac{1}{c^2}$, $\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \vec{\vartheta}}$ импульс.

Қозғалыс сипаттамасын $\vec{M}$ және $\vec{A}$ векторлық элементтерінің көмегімен жасауға болады. Содан кейін, $\vec{M}$ және $\vec{A}$ элементтерінің векторлық сипатына байланысты біз қозғалыс теңдеулерінің ең жалпы түрін автоматты түрде жаза аламыз:

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \frac{dM}{dt}\vec{e}_M + [\vec{\Omega}\vec{M}], \tag{3.5.3}$$

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{dA}{dt}\vec{e}_A + [\vec{\Omega}\vec{A}], \tag{3.5.4}$$

Сынақ бөлшектің қозғалыс теңдеулерінің осы жалпы жазбасында $\vec{M}$ сыртқы гравитациялық өрісте белгісіз бұрыштық жылдамдық $\vec{\Omega}$ болып қалады.Оның нақты түрі қарастырылып отырған физикалық жүйеге байланысты болуы керек. Шынында да, жұмыста [86] біз мынаны көрсетеміз:

$$\vec{\Omega} = \frac{\partial \bar{H}}{\partial \vec{M}}, \tag{3.5.5}$$

мұндағы $\bar{H}$ -Кеплер қозғалысы бойынша орташа Гамильтониан функциясының орташа мәні Сонымен қатар, $\bar{H}$ функциясы және $\vec{M}$ зерттелетін жүйенің адиабаттық инварианты.

$$M_0 = \frac{M}{\sqrt{1-\frac{A^2}{a^2}}}, a = \gamma m m_0. \tag{3.5.6}$$

Бұрыштық жылдамдықты $\vec{\Omega}$ білу белгілі релятивистік эффектілердің көпшілігін қозғалыс теңдеулерін (3.5.6) және (3.5.4) шешуге жүгінбестен тиімді есептеуге мүмкіндік береді. (3.5.6) инварианттың болуы (3.5.5) және (3.5.6) қозғалыс теңдеулерінің келесі көрінісін береді:

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \frac{dM}{dt}\vec{e}_M + \left[\vec{\Omega}\vec{M}\right]. \tag{3.5.7}$$

$$\frac{d\vec{e}_A}{dt} = \left[\vec{\Omega}\vec{e}_A\right]. \tag{3.5.8}$$

(3.5.7), (3.5.8) теңдеулері және (3.5.5) қатынасы ЖСТ механикасындағы денелер қозғалысының адиабаттық теориясы деп аталатын ЖСТ механикасының есептерін зерттеуге деген көзқарастың математикалық негізін құрайды.

Басқаша айтқанда, бұл теңдеулер (3.5.5) арақатынасымен бірге квази-жылулық есептегі эволюциялық қозғалыс есебін толығымен шешеді.

Шварцшильд есебі үшін, мысалы, ЖСТ механикасындағы денелер қозғалысының адиабаттық теориясы тұрғысынан қарапайым қозғалысты сипаттайтын теңдеулері бар:

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = 0, \quad \frac{d\vec{A}}{dt} = \left[\vec{\Omega}\vec{A}\right], \tag{3.5.9}$$

Гамильтонианның орташа мәні:

$$\bar{H} = mc^2 - \frac{ma^2}{2M_0^{\ 2}} + \frac{1}{c^2}\left(\frac{15ma^2}{8M^2{}_0} - \frac{m}{m_0}\xi_0\right)\frac{a^2}{M_0^{\ 2}} - \frac{3ma^4}{M_0^{\ 3}Mc^2}. \tag{3.5.10}$$

Еске салайық, бастапқы Гамильтониан (3.3.20) өрнегіндегідей. Бұрыштық жылдамдық:

$$\vec{\Omega} = \frac{\partial\vec{H}}{\partial\vec{M}} = \frac{3ma^4}{M^3M_0^{\ 3}c^2}\vec{M} = \frac{6\pi a^2}{M^2Tc^2}\vec{e}_M \tag{3.5.11}$$

және T периодтағы перигелий ығысуы келесі формуламен есептеледі:

$$\Delta g = \Omega T = \frac{6\pi a^2}{M^2c^2} = \frac{6\pi\gamma m_0}{a\left(1-e^2\right)c^2}. \tag{3.5.12}$$

Біз тағы да Эйнштейннің белгілі формуласын алдық. Мұның бәрі Вектор элементі арқылы $\vec{H}$ туындысын элементарлық қабылдау болды. осы жерден Шварцшильд есебіндегі перигелий ығысу әсері гамильтонияда m орбиталық моментіне тәуелділіктің пайда болуымен байланысты екендігі белгілі болды. Классикалық механикада, яғни Кеплер есебінде мұндай тәуелділік жоқ және перигелий қозғалыссыз қалады. Кеплер есебі туындаған жағдайда Гамильтониан тек M_0 жүйесінің инвариантына тәуелді болады және егер туынды алсақ:

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial M_0} = \frac{ma^2}{M^3{}_0} = \frac{2\pi}{T} \tag{3.5.13}$$

яғни, орташа қозғалыс деп аталады.

Енді Фоктың бірінші жуықтау метрикасы [86,91] негізінде айналмалы массивті шар өрісіндегі сынақ бөлшектің финитикалық қозғалысы туралы Лензе-Тирринг есебін қарастырыңыз [92]. Бұл жағдайда Гамильтониан:

$$H = mc^2 + \frac{p^2}{2m} - mU - \frac{1}{c^2}\left(\frac{p^4}{8m^3} + \frac{3Up^2}{2m} + \frac{\xi_0}{m_0}mU - \frac{mU^2}{2}\right) - \\ - \frac{2\gamma}{c^2}\left(\left[\bar{s}_0\vec{\nabla}\frac{1}{r}\right]\vec{p}\right) - \frac{2\gamma m}{7m_0c^2}\left(\left[\bar{s}_0\vec{\nabla}\left[\bar{s}_0\vec{\nabla}\frac{1}{r}\right]\right]\right). \tag{3.5.14}$$

ал қозғалыс теңдеулері:

$$\dot{\vec{M}} = \frac{2\gamma}{r^3c^2}\left[\bar{s}_0\vec{M}\right] - \frac{12\gamma m(\bar{s}_0\vec{r})}{7m_0r^5c^2}\left[\vec{r}\bar{s}_0\right], \tag{3.5.15}$$

$$\dot{\vec{A}} = \left(4E + 6mU + \frac{m}{m_0}\xi_0\right)\frac{\left[\vec{\nabla}U\vec{M}\right]}{mc^2} + \frac{2\gamma}{r^3c^2}\left[\bar{s}_0\vec{A}\right] + \frac{6\gamma(\bar{s}_0\vec{M})}{mr^5c^2}\left[\vec{r}\vec{M}\right] - \\ - \frac{6\gamma}{7m_0r^5c^2}\left\{s_0{}^2\left[\vec{r}\vec{M}\right] - \frac{5}{r^2}(\bar{s}_0\vec{r})^2\left[\vec{r}\vec{M}\right] - 2(\bar{s}_0\vec{r})\left[\bar{s}_0\vec{M}\right] + 2(\bar{s}_0\vec{r})\left[\vec{p}\left[\vec{r}\bar{s}_0\right]\right]\right\}. \tag{3.5.16}$$

Осы теңдеулерден Фоктың бірінші жуықтауында [86,91] ішкі құрылымына тәуелді интегралдың есебі бұрынғы еңбектерде келтірілген теңдеулермен салыстырғанда Лензе-Тирринг есебінің қозғалыс теңдеулерін айтарлықтай өзгертеді [82]. Бұл мәселені ЖСТ механикасындағы денелер қозғалысының адиабаттық теориясы негізінде қарастыра отырып, біз басында табамыз:

$$\vec{H} = mc^2 - \frac{ma^2}{2M_0^{\ 2}} + \frac{1}{c^2}\left\{\left(\frac{15ma^2}{8M^2{}_0} - \frac{m}{m_0}\xi_0\right)\frac{a^2}{M_0^{\ 2}} - \frac{3ma^4}{M_0^{\ 3}M} + \right.$$
$$\left. + \frac{m^2a^4}{m_0M_0^{\ 2}M^3}\left[2\left(\vec{s}_0\vec{M}\right) + \frac{ms_0^{\ 2}}{7m_0} - \frac{3m}{7m_0M^2}\left(\vec{s}_0\vec{M}\right)\left(\vec{s}_0\vec{M}\right)\right]\right\}. \qquad (3.5.17)$$

Векторлық элементтердегі қозғалыс теңдеулері:

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \left[\vec{\Omega}\vec{M}\right], \frac{d\vec{A}}{dt} = \left[\vec{\Omega}\vec{A}\right], \vec{\Omega} = \frac{\partial\vec{H}}{\partial\vec{M}}, \qquad (3.5.18)$$

Бұл жерде:

$$\vec{\Omega} = \frac{3ma^4}{M^3M_0^{\ 3}c^2}\vec{M} + \frac{m^2a^4}{m_0M^3M_0^3c^2}\left\{2\vec{s}_0 - \frac{3m\left(\vec{M}\vec{s}_0\right)}{7m_0M^2}\vec{S}_0 + \frac{6m\left(\vec{M}\vec{S}_0\right)}{7m_0M^4}\vec{M}\right\} -$$
$$- \frac{3m^2a^4\vec{M}}{m_0M^5M_0^3c^2}\left\{2\left(\vec{M}\vec{S}_0\right) + \frac{m}{7m_0}S_0^2 - \frac{3m\left(\vec{M}\vec{S}_0\right)^2}{7m_0M^2}\right\}. \qquad (3.5.19)$$

Өрнек (3.5.19) Лензе-Тирринг тапсырмасы бойынша ерте зерттеулердің нәтижелерін айтарлықтай толықтырады. Осылайша, ЖСТ механикасының алғашқы жуықтау метрикасындағы ішкі құрылымға тәуелді интегралдың есебі қажет болып көрінеді:

ЖСТ механикасының Квази-Кеплер есептерінің жалпы жағдайы үшін орташа Гамильтониан бар:

$$\overline{H} = \overline{H}\left(M_0, \vec{M}, \delta\vec{\varphi}\right), \qquad (3.5.20)$$

және автономды канондық теңдеулер бар [93,94]:

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \frac{\partial\overline{H}}{\partial\vec{\varphi}}, \frac{d\vec{\varphi}}{dt} = \frac{\partial\overline{H}}{\partial\vec{M}}, \qquad (3.5.21)$$

мұндағы $\delta\vec{\varphi}$ - шексіз кіші айналу векторы.

3.6 Адиабаттық теория арқылы Хартл-Торн метрикасында денелер қозғалысын зерттеу

Жалпы Хартл-Торн метрикасы туралы біз 2-бөлімде баяндағанбыз. Жоғарыда айтылғандай, бұл бөлімде бізге $1/c^2$ дәрежесінде кеңейтілген Хартл-Торн метрикасы қажет. Гармоникалық координаттарда ол былай жазылады [83, 8]

$$ds^2=\left(1-\frac{2Gm_0}{c^2r}-\frac{2GQ}{c^2r^3}P_2(\cos\theta)+\frac{2G^2{m_0}^2}{c^4r^2}-\frac{4G^2m_0Q}{c^4r^2}P_2(\cos\theta)\right)c^2dt^2$$
$$-\left[1+\frac{2Gm_0}{c^2r}-\frac{2GQ}{c^2r^3}P_2(\cos\theta)\right]\left[dr^2+r^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2)\right]+\frac{4GJ}{c^2r}\sin^2\theta dtd\varphi \tag{3.6.1}$$

Бұл бейнелеу бізге релятивистік түзетулерді нақты бөліп көрсетуге мүмкіндік береді. Сонымен, g_{tt}-де алғашқы үш мүше Ньютон теориясына, ал соңғы екі мүше жақшаның сыртындағы c факторына байланысты релятивистік теорияға жатады. Сонымен қатар, $1/c^2$ -ге пропорционал мүшелер де метриканың кеңістік бөлігінде пайда болады. Енді тікелей метрикадан (3.6.1) санақ бөлшектің Лагранж функциясын табамыз

$$L=-mc\frac{ds}{dt}=-mc^2+\frac{m\nu^2}{2}+\frac{Gm_0m}{r}-\frac{GmQ}{r^3}P_2(\cos\theta)+\frac{m}{2c^2}\left[\frac{\nu^4}{4}+\frac{3Gm_0\nu^2}{r}-\frac{G^2{m_0}^2}{r^2}\right]+$$
$$+\frac{m}{2c^2}\left[-\frac{3GQ\nu^2}{r^3}P_2(\cos\theta)+\frac{2G^2m_0Q}{r^4}P_2(\cos\theta)-\frac{4G\left[\vec r\times\vec j\right]}{r^3}\right] \tag{3.6.2}$$

және басқа

$$\vec\nu=\frac{d\vec r}{dt},\nu^2=\frac{dr^2+r^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2)}{dt^2} \tag{3.6.3}$$

Тек гармоникалық және изотропты координаттарда сызықтық жылдамдықты жоғарыда көрсетілген түрде жазуға болады.

Әрі қарай, біз одан олашақта орташалайтын гамильтонды алуымыз керек. Гамильтон функциясын анықтайтын өрнек [105] мына түрде берілген:

$$H=(\vec p\cdot\vec\nu)-L \tag{3.6.4}$$

алдымен, жалпылама импульстің $\vec p$ формасын іздейміз. Осылайша,

$$\vec p=\frac{\partial L}{\partial\vec\nu}=\left[1+\frac{\nu^2}{2c^2}+\frac{3Gm_0}{c^2r}-\frac{3GQ}{c^2r^3}P_2(\cos\theta)\right]m\vec\nu-\frac{2Gm}{c^2r^3}\left[\vec r\times\vec j\right] \tag{3.6.5}$$

(3.6.2)- (3.6.5) ескере отырып, Гамильтон келесі түрдегідей болады:

$$H=-mc^2+\frac{p^2}{2m}-\frac{Gm_0m}{r}+\frac{GmQ}{r^3}P_2(\cos\theta)-\frac{p^4}{8c^2m^3}-\frac{3Gm_0p^2}{2c^2mr}+$$
$$+\frac{G^2{m_0}^2m}{2c^2r^2}+\frac{3GQp^2}{2c^2mr^3}P_2(\cos\theta)-\frac{G^2m_0mQ}{c^2r^4}P_2(\cos\theta)+\frac{2G\left(\vec p\cdot\left[\vec r\times\vec j\right]\right)}{c^2r^3} \tag{3.6.6}$$

Ықшамдау үшін біз сынақ бөлшектің экваторлық жазықтықтағы қозғалысын қарастырамыз, яғни $\theta = \pi/2$. Енді, адиабаттық теорияға сәйкес, (3.6.6) өрнекте біз әрбір термді T кезеңінде орташалауымыз керек, ол үшін f функциясының орташа мәнін жазайық:

$$\bar{f} = \frac{1}{T}\int_0^T f dt \tag{3.6.7}$$

Бұл жұмыста ыңғайлы болу үшін орташалау полярлық координаталардағы релятивистік емес орбиталық бұрыштық импульс M көмегімен жүзеге асырылады.

$$M = mr^2 \frac{d\varphi}{dt} \tag{3.6.8}$$

Ол бізге t бойынша интегралдан φ бойынша интегралға өзгертуге мүмкіндік береді. Мұнда біз Кеплер есебінің шешімін қолданамыз [105]

$$r = \frac{P}{1 - e\cdot\cos\varphi}, 0 < \varphi < 2\pi \tag{3.6.9}$$

мұндағы e бұрынғыдай орбитаның эксцентриситет, P жарты тік сызық, φ поляр бұрышы. Демек, мынадай болып шығады

$$\bar{f} = \frac{1}{T}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\frac{dt}{d\varphi}d\varphi \tag{3.6.10}$$

Сонымен қатар, $\vec{p} = m\vec{\vartheta}$ импульсімен жазылған (3.6.6) теңдеудегі орташа шамаларға, сынақ бөлшек жылдамдығының келесі түрін қолданамыз:

$$\vec{v} = \frac{M}{mP}\{-\vec{i}\sin\varphi + \vec{j}(e + \cos\varphi)\} \tag{3.6.11}$$

Сондай-ақ, орталық дененің айналу бағытын таңдау еркін екенін атап өткен маңызды. Қарапайымдылық пен практикалық мақсаттар үшін оны z осі бойымен $\vec{J} = J\vec{k}$ ретінде туралаған жөн. Экваторлық жазықтықта қозғалатын сынақ бөлшектері үшін оның орбиталық бұрыш моментінің бағыты орталық дененің тиісті бұрыштық моментімен сәйкес келеді, яғни $\vec{M} \uparrow\uparrow \vec{J}$, демек $\vec{M} = M\vec{k}$.

(3.6.7) теңдеуді қолданып (3.6.6) теңдеудің әрбір мүшесіне және периодқа $T=\frac{2\pi M_0^3}{m\alpha^2}$ [105] формуласын пайдалану арқылы орташаланған Гамильтон функциясын алады:

$$\overline{H}=mc^2-\frac{m\alpha^2}{2M_0^2}-\frac{3m\alpha^4}{c^2M_0^3M}+\frac{15m\alpha^4}{8c^2M_0^4}+\frac{2m^2\alpha^4J}{m_0c^2M_0^3M^2}-$$
$$-\frac{m^3\alpha^4Q}{2m_0M_0^3M^2}-\frac{3m^3\alpha^6Q}{2m_0c^2M_0^3M^5}+\frac{5m^3\alpha^6Q}{4m_0c^2M_0^5M^3} \tag{3.6.12}$$

Күтілгендей, орташаланған Гамильтониан M_0 адиабаттық инвариантқа және орбиталық M бұрыштық моментке тәуелді. Келесі қадам $\vec{\Omega}$ бұрыштық жылдамдықтың түрін табу болып табылады. Ол үшін (3.6.33) теңдеу бойынша $\vec{M}$-ге қатысты $\vec{H}$-тің ішінара туындысын алуымыз керек. Нәтиже келесідей:

$$\vec{\Omega}=\left(\frac{3m\alpha^4}{c^2M_0^3M^2}-\frac{4m^2\alpha^4J}{m_0c^2M_0^3M^3}+\frac{3m^3\alpha^4Q}{2m_0M_0^3M^4}+\frac{15m^3\alpha^6Q}{2m_0c^2M_0^3M^6}-\frac{15m^3\alpha^6Q}{4m_0c^2M_0^5M^4}\right)\vec{e}_M \tag{3.6.13}$$

Соңында, перигелий ығысу бұрышын Δg табу үшін $\vec{\Omega}$ бұрыштық жылдамдық модулін зерттелетін бөлшектің T орбиталық периодына көбейтеміз. Осылайша, біз пішінді аламыз:

$$\Delta g=\frac{6\pi Gm_0}{c^2P}-\frac{8\pi GmJ}{c^2MP}$$
$$+\frac{3\pi Q}{m_0P^2}+\frac{15\pi GQ(1+e^2)}{2c^2P^3} \tag{3.6.14}$$

$$\Delta g=\frac{6\pi Gm_0}{c^2P}-\frac{8\pi GmJ}{c^2MP}+\frac{3\pi Q}{m_0P^2}+\frac{15\pi GQ(1+e^2)}{2c^2P^3}$$

мұндағы $P=M^2/m\alpha=a(1-e^2)$, a - орбитаның жартылай үлкен осі.

(3.6.14) теңдеуден біз әсерлердің суперпозиция принципі қарастырылған мәселеде дене масса, бұрыштық импульс және квадрупольдық момент момент бойынша берілген шешімнің жуық сипатына байланысты жарамды болатынын көре аламыз. Бірінші мүше Шварцшильд есебінің шешіміне сәйкес келеді (яғни орталық дененің массасынан туындаған кеңістік-уақыттың қисаюына байланысты); екінші мүше дененің айналуын есепке алу нәтижесінде пайда болады (ол кадрды тарту эффектісі ретінде көрінеді – Лензе-Тирринг эффектісі); үшінші мүше – дене деформациясының салдары ретінде квадрупольдық момент моментке байланысты классикалық түзету; ал төртінші мүше – квадрупольдық момент моменттің релятивистік түзетуі.

Шварцшильд есебінде перигелий ығысуының әсері Гамильтонда M орбиталық моментке тәуелділіктің пайда болуымен байланысты екенін атап өткен жөн. Классикалық механикада, яғни Кеплер есебінде мұндай тәуелділік жоқ және перигелий қозғалыссыз қалады. Сонымен қатар, перигелий ауысуы үшін алынған (3.6.14) өрнек мынадай шектеулерде

- $\vec{J}=0,\ \ Q=0$ Шварцшильд жағдайына азайтады [53,106];
- $\vec{J}\neq 0\left(J^2=0\right),\ \vec{J}\neq 0\left(J^2=0\right)$ Лензе-Тирринг эффектісі жағдайына азайтады [53,106];
- $\vec{J}=0,\ \ Q\neq 0$ статикалық деформацияланған дененің с жағдайына келтіреді [36];
- $\vec{J}\neq 0\left(J^2\neq 0\right),\ \ Q\neq 0$ сыртқы Фок метрикасының жағдайына азайтады [8].

Дәлірек айтқанда, кеңейтілген Фок метрикасында $Q=\kappa\dfrac{J^2}{m_0c^2}$ әр түрлі к мәндері келесі шектеу жағдайларына сәйкес келеді ($\sim 1/c^2$ жуықтауында):

- $\kappa=1$ кезінде Керр метрикасы үшін;
- $\kappa=4/7$ кезінде сұйық дененің метрикасы үшін;
- $\kappa=15/28$ кезінде қатты дене метрикасы үшін.

Салыстыру кезінде мынаны ескеру қажет [53] орталық дененің бұрыштық моменті $S_0=J$ деп, ал квадрупольдық момент[107] $Q=-D/2$ бойынша бұл жұмыстың Q-на қатысты D деп белгіленеді.

Нәтижелерді талдау. Енді Күн жүйесінің ішкі планеталарының: Меркурий, Шолпан және Жердің перигелий ығысуын бағалау үшін (3.6.14) теңдеуіді қолданамыз. Есептеулер үшін біз Күн массасын, радиусты, бұрыштық моментті және квадрупольдік моментті пайдаланамыз. Сынақ бөлшек бір планета болып табылады, сондықтан оның пішіні мен өлшемі ескерілмейді. Әдетте J_2 квадрупольдік параметр Q квадрупольдық моменттің орнына таңдалады. Олардың арасында тікелей байланыс бар [106]:

$$J_2=\frac{Q}{4m_0R^2} \tag{3.6.15}$$

мұндағы m_0 , R - сәйкесінше Күн массасы және радиусы. Күннің квадрупольдік параметрінің соңғы тәжірибелік өлшенген мәні [108] $J_2=(2.25\pm 0.9)\cdot 10^{-7}$ түрінде берілген. Күннің бұрыштық моментіне келетін болсақ, өкінішке орай, әдебиетте бақылау және эксперименталды түрде зерттелген деректерге негізделген мәндер жоқ. Сондықтан оны табу үшін бұрыштық моменттің жалпы формуласын қолдануға болады [105]:

$$J = I\omega \qquad (3.6.16)$$

мұндағы ω - өз осінің айналасында айналатын дененің бұрыштық жылдамдығы және $I = \frac{2}{5} m_0 R^2$ - шардың инерция моменті. Айта кету керек, Күннің айналуы дифференциалды, яғни экватордан полюстерге дейінгі қашықтыққа қарай азаяды. Дегенмен, мысал ретінде экватордағы бұрыштық жылдамдықтың мәнін таңдауға болады $\omega = 2.9 \cdot 10^{-6}\, rad/s$ [109]. Сонымен, Күннің бұрыштық моменті шамамен $J = 2.79 \cdot 10^{42}\, kg \cdot m^2/s$.

3.7.1-кестеде Меркурий, Шолпан және Жердің орбиталық параметрлері берілген [110, 111]. Сонымен қатар, (3.6.14)теңдеуде келтірілген барлық түзетулер әрбір әсердің жеке үлесін бағалау үшін бөлек есептеледі. Барлық мәндер 100 Жер жылына есептелген.

Кесте 3.6.1 – Меркурий, Шолпан және Жердің орбиталық параметрлері мен перигелий ығысу бұрыштары

Планеталар	**Меркурий**	**Шолпан (Венера)**	**Жер**
Үлкен жарты ось, *a* (км)	57909082	108208600	149597870
Эксцентриситет, *e*	0.2056	0.0068	0.0167
Жартылай радиус, *P* (км)	55460308	108203681	149556105
Сидерлік кезең, *T* (жер күні)	87.968	224.6950	365.242
$6\pi G m_0 / c^2 P$	43"	8.63"	3.84"
$8\pi G\, mJ / c^2\, MP$	0.116"	0.017"	0.006"
$3\pi Q / m_0\, P^2$	0.03"	0.003"	0.001"
Бақылау деректері	(43.11±0.45)"	(8.4±4.8)"	(5.0±1.2)"

Кестеден көрініп тұрғандай, Меркурий орбитасының перигелий ығысу мәні ең үлкен. Бұл бірнеше факторларға байланысты. Біріншіден, Меркурий Күнге ең жақын планета, сондықтан ол оның гравитациялық өрісінің әсерін ең көп сезінеді. Екіншіден, Меркурий Күнді Жерге қарағанда жылдамырақ айналады (100 Жер жылы ішінде 415 рет айналады, ал Шолпан бар болғаны 162 айналым жасайды).

Меркурий, Шолпан және Жер үшін, перигелий ығысуына негізгі үлесті Күн массасының әсері қосады. Бұған қоса, Күннің айналуынан туындайтын түзету аса маңызды емес. Классикалық квадруполь момент түзетуі бұдан да аз әсер етеді. Бұл жағдайда релятивистік квадруполь момент түзетуі $15\pi Q\left(1+e^2\right)/2c^2P^2$ өте кіші мәнге ие, сондықтан оны елемеуге болады.

Есептелген мәндер бақылау деректерімен жақсы сәйкестік көрсетеді. Бақылаулар бойынша Меркурийдің перигелий ығысуы 0.45", Шолпан үшін 4.8", ал Жер үшін 1.2".

Перигелий ығысуы эксцентриситеті жоғары орбиталарда (Меркурий сияқты) анығырақ байқалады. Егер орбита дөңгелекке жақын пішінге ие болса (мысалы, Шолпандағыдай), перигелий ығысуын бақылау қиындайды.

3.7 Адиабаттық теория арқылы Керр метрикасында денелер қозғалысын зерттеу

Гармониялық координаталардағы Керр метрикасы

Бойер-Линдквист координаталарындағы Керр метрикасының түрі келесідей беріледі:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2\mu R}{R^2 + a^2\cos^2\Theta}\right)c^2 dt^2 - \frac{R^2 + a^2\cos^2\Theta}{R^2 - 2\mu R + a^2} dR^2 \tag{3.7.1}$$
$$-\left(R^2 + a^2\cos^2\Theta\right)d\Theta^2 + \frac{4\mu R a \sin^2\Theta}{R^2 + a^2\cos^2\Theta} dt d\phi$$
$$-\left(R^2 + a^2 + \frac{2\mu R a^2 \sin^2\Theta}{R^2 + a^2\cos^2\Theta}\right)\sin^2\Theta d\phi^2$$

мұнда μ және a масса m_0 және бұрыштық момент J арқылы келесі түрде анықталады:

$$\mu = \frac{Gm_0}{c^2}, \quad \alpha = \frac{J}{m_0 c} \tag{3.7.2}$$

Мұнда G – гравитациялық тұрақты, ал c – жарық жылдамдығы.

Бұл жұмыстың мақсатында гармониялық координаталарды x^μ енгізген ыңғайлы, олар келесі шарттарды қанағаттандыруы тиіс:

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\sqrt{-g}\, g^{\mu\nu}\right) = 0 \tag{3.7.3}$$

мұнда $g^{\mu\nu}$ – қарсы вариантты метрика тензоры, ал g – болса $g_{\mu\nu}$ ның анықтауышы[58]. Сонымен қатар, гармониялық координаталар $\Gamma^\mu_{\nu\lambda}$ арқылы келесі түрде өрнектеледі:

$$\Gamma^\mu_{\nu\lambda} g^{\nu\lambda} = 0 \tag{3.7.4}$$

Практикалық тұрғыдан алғанда, бұл координаталар ыңғайлырақ [112]. Гармоникалық координаталар жалпы салыстырмалылықтағы көптеген есептер үшін маңызды [58]. Мысалы, олар кеңістіктің гравитациялық өріс көзінен үлкен қашықтықта біртекті және изотропты болу шарттарымен байланысты.

Өз кезегінде, кеңістіктің біртектілігі мен изотроптылығы энергияның, импульстің және бұрыштық импульстің сақталуын білдіреді, олар шын мәнінде қозғалыстың бірінші интегралдары болып табылады.

Адиабаттық теорияда қолдану үшін Керр метрикасы (3.7.1) постньютондық жуықтау секілді $1/c^2$ дәрежесіне дейін қатарға жіктеледі. Сонымен қатар, келесі координаталық түрлендіру Бойер-Линдквист координаталарын гармоникалық координаталармен байланыстырады [113].

$$R = r + \frac{1}{c^2}\left(Gm_0 - \frac{J^2 \sin^2\theta}{2m_0{}^2 r}\right),$$

$$\Theta = \theta - \left(Gm_0 - \frac{J^2 \sin\theta\cos\theta}{2c^2 m_0{}^2 r^2}\right). \tag{3.7. 5}$$

Осылайша, гармониялық координаталардағы Керр жуық метрикасы алынады.

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2Gm_0}{c^2 r} + \frac{2G^2 m^2{}_0}{c^4 r^2} + \frac{2G^2 J^2}{c^4 m_0 r^3}\mathrm{P}_2(\cos\theta)\right)c^2 dt^2$$
$$-\left(1 + \frac{2Gm_0}{c^2 r}\right)\left(dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\phi^2\right) \tag{3.7.6}$$

мұнда $P_2(\cos\theta) = \left(3\cos^2\theta - 1\right)/2$ – Лежандр көпмүшелігі.

Керр метрикасының (3.7.6) гармоникалық өрнегі салыстырмалық түзетулерді нақты анықтау үшін маңызды. Метрика тензорының уақыттық компонентінде алғашқы екі мүше Ньютон теориясына сәйкес келеді, ал соңғы екі мүше таза салыстырмалық сипатқа ие, өйткені олар $1/c^2$ -қа пропорционал. Сонымен қатар, $1/c^2$ -қа пропорционал мүшелер метрика тензорының кеңістіктік және аралас компоненттерінде де кездеседі.

Метриканың (3.7.6) гармоникалық координаталар шартын $\sim 1/c^2$ жуықтауында қанағаттандыратыны тексерілді. Айта кету керек, әдебиетте Керр метрикасының гармоникалық координаталардағы әртүрлі математикалық әдістермен алынған бірнеше нұсқалары бар [114–119]. Біздің гармоникалық координаталардағы Керр метрикасының (3.7.6) өрнегі шекті жағдай $\sim 1/c^2$ үшін [119]-дегі нәтижелермен сәйкес келеді.

Бірінші ретті пост-Ньютондық (БРПН) жуықтауда метрика тензорының компоненттері әртүрлі ретті жуықтауларға ие екені түсіндірілуі тиіс. Мысалы, $g_{00} \sim 1/c^4 + \mathrm{O}\left(1/c^6\right)$, $g_{0j} \sim 1/c^3 + \mathrm{O}\left(1/c^5\right)$, және $g_{jk} \sim 1/c^2 + \mathrm{O}\left(1/c^4\right)$. Алайда, сызықты элементі $g_{00}\left(dx^0\right)^2$, $g_{0j}dx^0 dx^j$ және $g_{jk}dx^j dx^k$ өрнектерін қамтиды, мұнда $x^0 = ct,$ $x^1 = r,$ $x^2 = \theta$ және $x^3 = \phi$ сондықтан $ds^2 \sim 1/c^2 + \mathrm{O}\left(1/c^4\right)$. Демек, Лагранж функциясы, Гамильтон функциясы, жалпыланған импульс, жылдамдық, орбиталық импульс сияқты шамалар да $\sim 1/c^2 + \mathrm{O}\left(1/c^4\right)$ тәртібінде болады. Толық мәліметтер үшін [120] (1093–1094 беттер) және [121] (378–381 беттер) оқулықтарына жүгінуге болады.

Осылайша, спиндік эффект метриканың БРПН жуықтауында, яғни g_{0j}-дің $1/c^3$ жуықтауында көрінеді, бірақ жол элементінде ол БРПН жуықтауында, яғни $cdtdx^j$ коэффициенті арқылы байқалады (қараңыз: [60] 258–361 беттер, [122] 7–8 тараулар).

Әдістеме, нәтижелер, талдаулар және басқа жұмыстармен салыстыру
Адиабаттық теорияны Керр кеңістігінде қолдану үшін $1/c^2$ дәрежелеріне жіктелген гармониялық координаталарда жазылған Керр метрикасы қажет. (3.7.6) теңдеуі арқылы сынақ бөлшектің Лагранж функциясын келесі түрде аламыз:

$$
\begin{aligned}
L = -mc\frac{ds}{dt} = -mc^2 + \frac{m\nu^2}{2} + \frac{Gm_0 m}{r} + \frac{m\nu^4}{8c^2} \\
+\frac{3Gm_0^2 m\nu^2}{2c^2 r} - \frac{G^2 m_0^2 m}{2c^2 r^2} \\
-\frac{GmJ^2}{c^2 m_0 r^3} P_2(\cos\theta) - \frac{4G\left(\vec{\nu}\cdot\left[\vec{r}\times\vec{j}\right]\right)}{c^2 r^3}
\end{aligned}
\tag{3.7.7}
$$

Сонымен қатар, сынақ бөлшектің жылдамдығы стандартты түрде анықталады:

$$
\vec{\nu} = \frac{d\vec{r}}{dt}, \nu^2 = \frac{dr^2}{dt^2} + r^2\left(\frac{d\theta^2}{dt^2} + \sin^2\theta\frac{d\varphi^2}{dt^2}\right) \tag{3.7.8}
$$

Жоғарыда аталған сызықтық жылдамдық формасы тек гармоникалық және изотроптық координаталарда ғана қолданылады.

Гамильтон функциясы келесі қадам бойынша алынуы керек.:

$$
H = (\vec{p}\cdot\vec{\nu}) - L \tag{3.7.9}
$$

$\vec{p} = \partial L/\partial\vec{\nu}$ – жалпыланған импульс

$$
\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial\vec{\nu}} = m\vec{\nu} + \frac{m\nu^2}{2c^2}\vec{\nu} + \frac{3Gm_0 m}{c^2 r}\vec{\nu} - \frac{4G}{c^2 r^3}\left[\vec{r}\times\vec{j}\right] \tag{3.7.10}
$$

мұнда $\vec{\nu}$ – сызықтық жылдамдық.

$$
\vec{\nu} = \frac{1}{m}\left(\vec{p} - \frac{p^2}{2m^2c^2}\vec{p} - \frac{3Gm_0}{c^2 r}\vec{p} + \frac{4G}{c^2 r^3}\left[\vec{r}\times\vec{j}\right]\right) \tag{3.7.11}
$$

(3.7.7)– (3.7.11) ескере отырып, Гамильтон келесі түрдегідей болады:

$$H = mc^2 + \frac{p^2}{2m} - \frac{Gm_0 m}{r} - \frac{p^4}{8c^2 m^3} - \frac{3Gm_0 p^2}{2c^2 mr} + \\ + \frac{G^2 m_0{}^2 m}{2c^2 r^2} + \frac{GmJ^2}{c^2 m_0 r^3} P_2(\cos\theta) + \frac{2G\left(\vec{p}\cdot\left[\vec{r}\times\vec{j}\right]\right)}{c^2 r^3} \quad (3.7.12)$$

Адиабаттық теорияға сәйкес, бөлшектің айналу периоды T ішінде (3.7.12) теңдеуіндегі әрбір мүше бойынша орташа мәнді алу қажет. Орташа мән f келесідей анықталады:

$$\bar{f} = \frac{1}{T}\int_0^T f dt \quad (3.7.13)$$

Релятивистік емес орбиталық айналу импульсі M полярлық координаталарда оны оңай орташа алуға мүмкіндік береді [105].

$$M = mr^2 \frac{d\phi}{dt} \quad (3.7.14)$$

бұл эллипстік орбита бойымен қозғалысты сипаттауда t бойынша интегралдауды ϕ бойынша интегралдауға ауыстыруға мүмкіндік береді. Мұнда біз Кеплер есебіне төмендегі шешімді қолданамыз

$$r = \frac{P}{1 + e\cdot\cos\phi}, 0 < \phi < 2\pi \quad (3.7.15)$$

мұндағы e – орбитаның созылу дәрежесі (эксцентриситет), P– жартылай параметр , ϕ– полярлық бұрышы. Демек, ол төмендегідей болып шығады

$$\bar{f} = \frac{1}{T}\int_0^{2\pi} f(\phi)\frac{dt}{d\phi}d\phi = \frac{m}{TM}\int_0^{2\pi} f(\phi) r^2 d\phi \quad (3.7.16)$$

Сонымен қатар, $\vec{p} = m\vec{\vartheta}$ импульсімен жазылған (3.7.12) теңдеудегі орташа шамаларға, сынақ бөлшек жылдамдығының келесі түрін қолданамыз:

$$\vec{r} = r\left(\vec{i}\cos\phi + \vec{j}\sin\phi\right) \quad (3.7.17)$$

$$\vec{v} = \frac{M}{mP}\{-\vec{i}\sin\phi + \vec{j}(e + \cos\varphi)\} \quad (3.7.18)$$

Сондай-ақ, орталық дененің айналу бағытын таңдау еркіндігі бар екенін атап өту маңызды. Қарапайымдылық және практикалық мақсаттар үшін оны z_0 осі бойымен $\vec{J} = J\vec{k}_0$ ретінде туралау ұсынылады. Экваторлық емес жазықтықта қозғалатын сынақ бөлшек үшін оның орбиталық бұрыштық моментінің бағыты орталық дененің нақты бұрыштық моментімен сәйкес келмейді (олар тек экваторлық жазықтықта сәйкес келеді, яғни $\theta = \pi/2$ болғанда).

Кейіннен, эллипстік орбитада қозғалатын сынақ денесінің орташа мәні xy жазықтығында орналасқан және айналмалы координаталар жүйесінде (x, y, z) айналу периоды бойынша алынады. Период, жартылай фокустық параметр және эксцентритет үшін жарты үлкен остің (а) көмегімен өрнектелетін формулаларды (бұл жерде Kerr айналу параметрімен шатастыруға болмайды) пайдалана отырып, Гамильтонианның (3.7.12) әрбір мүшесіне (3.7.13) немесе (3.7.16) теңдеуді қолдану арқылы есептеу жүргізіледі.

$$P = \frac{M^2}{m\alpha} = \alpha(1-e^2),\ e = \sqrt{1-\frac{M^2}{M^2{}_0}},$$
$$T = \frac{2\pi M_0^3}{m\alpha^2} = 2\pi\sqrt{\frac{m\alpha^2}{\alpha}}, \tag{3.7.19}$$

Орташаланған Гамильтон функциясын аламыз:

$$\overline{H} = mc^2 - \frac{m\alpha^2}{2M_0^2} - \frac{3m\alpha^4}{c^2M_0^3M} + \frac{15m\alpha^4}{8c^2M_0^4} + \frac{2m^2\alpha^4}{m_0c^2M_0^3M^3}\left(\vec{J}\cdot\vec{M}\right) + \frac{m^3\alpha^4}{4m_0c^2M_0^3M^3}\left(J^2 - \frac{3\left(\vec{J}\cdot\vec{M}\right)^2}{M^2}\right) \tag{3.7.20}$$

Күтілгендей, орташаланғанГамильтониан M_0 адиабаттық инвариантына және M орбиталық бұрыштық моментке тәуелді. Келесі қадам бұрыштық жылдамдық $\vec{\Omega}$-ның түрін табу. Осы мақсатта, (3.7.33) теңдеуге сәйкес, $\vec{H}$ функциясын $\vec{M}$ бойынша жартылай дифференциалдау арқылы мынаны аламыз:

$$\vec{\Omega} = \frac{3m\alpha^4}{c^2M_0^3M^2}\vec{e}_M + \frac{2m^2\alpha^4 J}{m_0c^2M_0^3M^3}(\vec{e}_J - 3(\vec{e}_J\cdot\vec{e}_M)\vec{e}_M) - \tag{3.7.21}$$
$$-\frac{3m^3\alpha^4J^2}{4c^2m_0{}^2M_0^3M^4}(2(\vec{e}_J\cdot\vec{e}_M)\vec{e}_J) + (1-5(\vec{e}_J\cdot\vec{e}_M)^2\vec{e}_M)$$

Осыған сәйкес, $\vec{J} = J\vec{e}_J$ және $\vec{M} = M\vec{e}_M$. Қорытынды формула, құрамында $\sim J^2$ мүшелері бар, [60] дереккөзіндегі § 105, 358–360 беттерінде көрсетілген Лензе-Тирринг метрикасына қатысты бұрынғы нәтижені кеңейтеді. $\sim J^2$ мүшелері Атомдық физикадағыдай айналу-орбиталық өзара әрекеттесуді көрсетеді. Бұл контексте «айналу» орталық дененің меншікті бұрыштық моменті J дегенді білдіреді, ал M сынама бөлшектің орталық дененің айналасындағы айналу қозғалысына сәйкес орбиталық моментін білдіреді. Қарапайымдылық үшін, сынама бөлшектің айналуын есепке алмадық. $\sim J^2$ алдындағы белгі J пен M арасындағы бұрышқа байланысты болып, классикалық перигелий ығысу әсерін күшейтуі немесе әлсіретуі мүмкін. Алайда, Күн жүйесінде және Құс Жолының орталығындағы (ҚЖО) аса массивті қара құрдымның АМҚҚ гравитациялық өрісіндегі жұлдыздардың қозғалысын зерттегенде, перигелий ығысу әсеріне $\sim J^2$ пропорционал мүшелердің қосқан үлесі өте аз. Бұл Күннің салыстырмалық объект емес екендігімен және ҚЖО ядросындағы АМҚҚ пен жұлдыздар арасындағы қашықтықтың (S2 жұлдызы үшін перицентрде шамамен 1440 есе) АМҚҚ -ның Шварцшильд радиусынан әлдеқайда үлкен болуымен түсіндіріледі. $\sim J^2$ мүшелерінен туындайтын әсерлер нейтрон жұлдыздары мен қара құрдымдар сияқты шағын объектілердің маңында ~J мүшелерімен шамалас болуы мүмкін.

Осыдан орбита және онымен байланысты орбиталық координаталық жүйе қозғалмайтын нүктенің айналасында (3.7.31)-(3.7.32) теңдеулерінің жалпы түрінен алынған (3.7.21) бұрыштық жылдамдықпен қатты дене сияқты айналатыны шығады. Осыған байланысты, статикалық жүйеге қатысты айналмалы координаталық жүйенің бағытын анықтайтын Эйлер бұрыштарының туындылары бұрыштық жылдамдықпен байланыстырылуы мүмкін.

Бекітілген координаттық жүйені (x_0, y_0, z_0) деп белгілейік, оның бірлік векторлары $(\vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0)$. Ал айналмалы жүйені (x, y, z) деп алып, оның бірлік векторларын $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ деп атаймыз. Сонымен қатар, біз Эйлер бұрыштарын келесідей белгілейміз: δ – прецессия (прецессия бұрышы), g – ішкі айналу (метрикалық тензордың анықтауышымен шатастырмау керек), i – нутация (сынақ бөлшек орбитасының еңкею бұрышы). Енді бұрыштық жылдамдық Ω келесі түрде өрнектеледі:

$$\vec{\Omega} = \dot{\delta}\vec{e}_{z_0} + \dot{i}\vec{e}_\delta + \dot{g}\vec{e}_z \qquad (3.7.22)$$

Мұнда $\vec{e}_\delta$ бағытындағы бірлік вектор, $\vec{e}_{z_0} = \vec{k}_0 = \vec{e}_J$ бағытына бағытталған бірлік вектор, $\vec{e}_z = \vec{k} = \vec{e}_M$ – z осіндегі бірлік вектор, ал $\dot{\delta}, \dot{i}, \dot{g}$ – сәйкес Эйлер бұрыштарының туындылары. Айта кету керек, $\vec{e}_z$ $\vec{M}$ мен, ал $\vec{e}_{z_0}$ $\vec{J}$ -мен бағыттас (коллинеарлы). Осылайша, i бұрышы $\vec{J}$ және $\vec{J}$ арасындағы бұрышты білдіреді (3.7.1-суретті қараңыз).

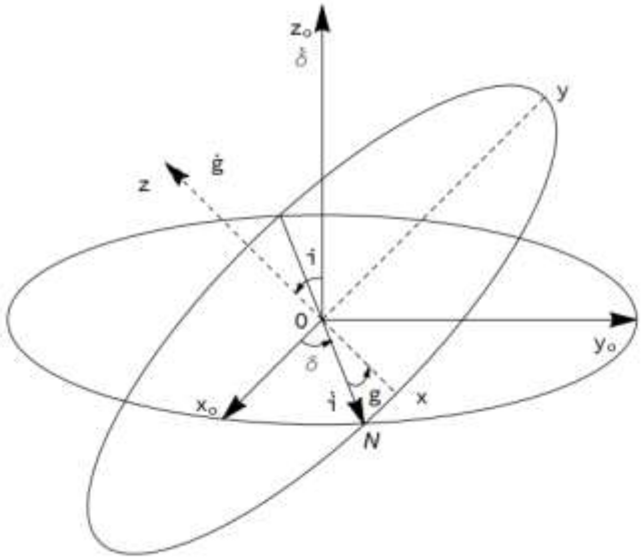
Енді жоғарыдағы нәтижелерді ескеріп, бұрыштық жылдамдықтың (3.7.21) өрнегін жалпы өрнекпен (3.7.22) салыстыра отырып, біз мынаны аламыз:

$$\dot{i} = 0 \qquad (3.7.23)$$

$$\dot{\delta} = \frac{2m^2\alpha^4 J}{c^2 m_0 M_0^3 M^3} - \frac{3m^3\alpha^4 J^2}{2m^2{}_0 c^2 M_0^3 M^4}(\vec{e}_J \cdot \vec{e}_M), \tag{3.7.24}$$

$$\dot{g} = \frac{3m\alpha^4}{c^2{}_0^3 M^2} - \frac{6m^2\alpha^4 J}{m_0 c^2 M_0^3 M^3}(\vec{e}_J \cdot \vec{e}_M) - \frac{3m^3\alpha^4 J^2}{4m_0^2 c^2 M_0^3 M^4}\left(1 - 5(\vec{e}_J \cdot \vec{e}_M)^2\right). \tag{3.7.25}$$

(3.7.23) теңдеуден көрініп тұрғандай, орбитаның көлбеуі уақыт өте келе өзгермейді.



Сурет 3.7.1 – Эйлер бұрыштары және олардың туындылары

(3.7.24)-(3.7.25) теңдеулерін интегралдау арқылы біз абсолютті перигелий ығысу бұрышын g_{abs} аламыз, ол:

$$\Delta g_{abs} = \Delta g + \Delta\delta \tag{3.7.26}$$

Осылайша, біз мынаны аламыз:

$$\begin{aligned} \Delta g_{abs} &= \frac{6\pi\alpha^2}{c^2 M^2} + \frac{4\pi m\alpha^2 J}{m_0 c^2 M^3}(1 - 3(\vec{e}_J \cdot \vec{e}_M)) \\ &- \frac{3\pi m^2\alpha^2 J^2}{2c^2 m_0{}^2 M^4}(1 + 2(\vec{e}_J \cdot \vec{e}_M) - 5(\vec{e}_J \cdot \vec{e}_M)^2), \end{aligned} \tag{3.7.27}$$

немесе, Eq. (3.8.19) теңдеуіне сәйкес баламалы түрде.

$$\begin{aligned} \Delta g_{abs} &= \frac{6\pi G m_0}{c^2 P} + \frac{4\pi G^{1/2} J}{m_0^{1/2} c^2 P^{3/2}}(1 - 3(\vec{e}_J \cdot \vec{e}_M)) \\ &- \frac{3\pi J^2}{2c^2 m_0{}^2 P^2}(1 + 2(\vec{e}_J \cdot \vec{e}_M) - 5(\vec{e}_J \cdot \vec{e}_M)^2). \end{aligned} \tag{3.7.27}$$

Осылайша, экваторлық емес жазықтықта сынақтық бөлшектің қозғалысын зерттеу үшін перигелий ығысуының орбиталық көлбеуге тәуелділігін нақты көрсету керек. Экваторлық жазықтықта $\vec{e}_J$ және $\vec{e}_M$ ортогональді, сондықтан:

$$\Delta g_{abs} = \frac{6\pi\alpha^2}{c^2 M^2} - \frac{8\pi m\alpha^2 J}{c^2 m_0 M^3} + \frac{3\pi m^2\alpha^2 J^2}{c^2 m_0^2 M^4}, \tag{3.7.28}$$

немесе балама түрде:

$$\Delta g_{abs} = \frac{6\pi G m_0}{c^2 P} - \frac{8\pi G m J}{c^2 M P} + \frac{3\pi J^2}{c^2 m_0^2 P^2} \tag{3.7.29}$$

(3.7.29)-теңдеуден көріп отырғанымыздай, қарастырылып отырған мәселе үшін салыстырмалылық әсерлерін есепке алу принципі жуық шешімнің сипатына негізделген. Бұл шешім масса мен бұрыштық моменттің екінші реттік дәрежесіне дейінгі өрнектерін береді. Бірінші мүше орталық дененің массасының кеңістік қисықтығын туғызу әсеріне байланысты Шварцшильд есебінің шешіміне сәйкес келеді. Екінші мүше — Лензе-Тирринг әсері, яғни кеңістіктік сүйреу нәтижесінде пайда болатын эффект. Ал соңғы мүше – бұрыштық моменттің екінші реттік дәрежесіне дейінгі әсерін есепке алатын түзету.

Ескерту: Перигелий ығысуының әсері Гамильтон теңдеулеріндегі орбиталық момент M -нің пайда болуымен байланысты. Классикалық механикада, яғни Кеплер есебінде мұндай тәуелділік жоқ, сондықтан перигелий қозғалыссыз қалады.

Шығарылған (3.7.28) формуласы белгілі жағдайларда әдебиетте бұрыннан бар нәтижелерге келтіріледі (сонымен қатар гармоникалық координаттарда алынған). Осылайша, (3.7.28) теңдеуіндегі шекті жағдайлар келесіге сәйкес келеді:

- $\vec{J} = 0$ болса, онда бұл Шварцшильд жағдайына келеді;
- $\vec{J} \neq 0 \left(J^2 = 0\right)$ болса, онда Лензе-Тирринг әсеріне келеді;
- $\vec{J} \neq 0 \left(J^2 \neq 0\right)$ болса, онда кеңейтілген Фок метрикасына сәйкес келеді.

[59] сілтемеде айтылғандай, J бұрыштық моменті көп реттік моменттермен, негізінен Q квадруполь моментімен байланысты. Егер кеңейтілген Фок метрикасы қабылданса, онда: $Q = \kappa J^2 / \left(m_0 c^2\right)$ мұнда к мәндері $\sim 1/c^2$ жуықтауында келесі шекті жағдайларға сәйкес келеді:

- $\kappa = 1$ кезінде Керр метрикасы үшін;
- $\kappa = 4/7$ кезінде сұйық дененің метрикасы үшін;
- $\kappa = 15/28$ кезінде қатты дене метрикасы үшін.

Осылайша, егер координаталарды дұрыс таңдау мүмкін болса, бұрыштық момент пен квадруполь моментінің арасында тікелей байланыс орнатуға болады.

Айта кету керек, Керр жуықтауы айналатын объектілерге байланысты физикалық жағдайларды модельдеуде өте пайдалы болуы мүмкін, бірақ оның Харлт-Торн метрикасына қатысты маңызды кемшілігі бар. Керр метрикасының квадруполь моменті оның айналу моментінен тәуелсіз емес, ал Харлт-Торн метрикасында бұл екі параметр бір-бірінен тәуелсіз. Сондықтан Керр жуықтауы негізінде жасалған болжамдарға аса мұқият қарау қажет, себебі олар Харлт-Торн метрикасына негізделген нәтижелермен салыстырғанда жеткіліксіз немесе тіпті қате ақпарат беруі мүмкін. Бұл мәселе [123] еңбегінде көрсетілген.

Перигелий/перицентр ығысуының формуласы арқылы алынған осы жұмыс нәтижелерімен салыстыру қызықты:

$$\Delta g = 6\pi\frac{M}{r_c} + 3\pi\frac{Q}{r_c}\left(\frac{1}{L_z^2}+\frac{2}{r_c^2}\right) - 3\pi\frac{J^2}{r_c^2}\left(\frac{4}{L_z^2}+\frac{59}{2r_c^2}\right) - 8\pi\frac{JM}{L_z r_c}\sqrt{L_z^2+r_c^2}\left(\frac{1}{L_z^2}+\frac{1}{r_c^2}\right) +$$
$$+24\pi\frac{JQ}{L_z r_c^3}\sqrt{L_z^2+r_c^2}\left(\frac{1}{L_z^2}+\frac{3}{r_c^2}\right) + 27\pi\frac{M^2}{r_c^2} + 3\pi\frac{MQ}{2r_c^2}\left(\frac{30}{L_z^2}+\frac{53}{r_c^2}\right) +$$
$$+\frac{9}{4}\pi\frac{Q^2}{r_c^2}\left(\frac{3}{L_z^4}+\frac{22}{L_z^2 r_c^2}+\frac{63}{r_c^4}\right) \tag{3.7.30}$$

Бұл өрнек [124] сілтемеде жалпыланған Хартл-Торн метрикасы үшін алынған және Q^2 -ге тәуелді мүшелерді қамтиды. Керр метрикасы үшін алынған нәтижемен салыстыру үшін Q^2 , $\sim M^2$ және $\sim JQ$ мүшелерін елемеуіміз керек. Сонымен қатар, квадруполь моментін $Q = J^2/M$ түрінде жазу керек, мұнда біздің белгілеулерімізде: $M = m_0$, r_c - орталық дененің массасы, $r_c = P$, L_z - шындыққа жақын радиус, $L_z = M/\ m$ - бөлшектің бұрыштық моменті.

Осыны ескере отырып, біз мынаны аламыз:

$$\Delta g = 6\pi\frac{M}{r_c} - 8\pi\frac{JM}{L_z r_c}\sqrt{L_z^2+r_c^2}\left(\frac{1}{L_z^2}+\frac{1}{r_c^2}\right) +$$
$$+3\pi\frac{J^2}{Mr_c^3}\left(\frac{1}{L_z^2}+\frac{2}{r_c^2}\right) + 3\pi\frac{J^2}{2r_c^2}\left(\frac{11}{L_z^2}+\frac{3}{r_c^2}\right) \tag{3.7.31}$$

Физикалық бірліктерге қайта келтіру үшін келесі тәуелділіктерді енгіземіз:

$$M \to \frac{Gm_0}{c^2}, \quad J \to \frac{GJ}{c^3}, \quad L_z \to \frac{M}{cm}, \quad r_c \to P.$$

Соңында, $\sim\frac{1}{c^2}$ -қа дейінгі мүшелерді ғана ескерсек, соңғы өрнек келесідей болады:

$$\Delta g \approx \frac{6\pi G m_0}{c^2 P} + \frac{8\pi G^2 J m_0 m^3}{c^2 M^3} - \frac{3\pi G J^2 m^2}{c^2 m_0 P M^2} \qquad (3.7.32)$$

Бұл (3.7.28) - теңдеуге балама өрнек, егер біз $M^2 = m\alpha P = G m_0 m^2 P$ кері қатынасын қолдансақ. Осылайша, біздің нәтижеміз [124] сілтемедегі алынған нәтижемен сәйкес келеді.

3.8.1 - кестеде біз бірнеше астрофизикалық объектілердің орбиталық параметрлерін ұсынамыз және (3.7.26) -теңдеу бойынша перигелий ығысуын есептейміз. Барлық түзетулер жеке параметрлердің үлесін бағалау үшін бөлек қарастырылады. Перигелий ығысуы Күн жүйесіндегі ішкі планеталар үшін және С-шеңбер жұлдыздары (S-cluster stars) үшін есептеледі, олар *SgrA* -құс жолының орталығында орналасқан қара құрдымның* гравитациялық өрісінде қозғалады. Күн үшін біз $m_0 = M_\otimes = 2\times10^{30}$ кг және $J = 1{,}92\times10^{41}$ кг м²/с аламыз [125]. SgrA* үшін $m_0 = 4{,}2\times10^6 M_\otimes$ және $a_* = 0.44 cJ / G m_0^2$ қолданамыз [126]. Осыдан, $J = 6{,}82\times10^{54}$ кг м²/с болады. Есептеулерде орбитаның көлбеу бұрышын ескеру қажет.

Кестеден көрініп тұрғандай, J -ге пропорционалды перигелий ығысуы m_0 -мен салыстырғанда әрдайым аз мәнге ие. Сонымен қатар, J^2 -қа тәуелді мүшелердің мәні J -мен салыстырғанда өте аз және оларды елемеуге болады.

Күн жүйесімен салыстырғанда, периастрдың ығысу эффектісі Құс жолы галактикасының ядросында орналасқан S-жұлдыздар шоғыры үшін айқынырақ байқалады.

Кесте 3.7.1 – Меркурий [110, 111], Шолпан (Венера), Жер және S-жұлдыздар шоғыры S2, S38, S55 және S62 [127] үшін орбиталық параметрлері мен перигелий ығысуы.

Объектілер	Үлкен жарты ось, a (АБ)	Эксцентриситет, e	Орбита көлбеу бұрышы, i (°)	Жұлдыздық кезең, T (жыл)	$\sim m_0$	$\sim J$	$\sim J^2$
Меркурий	0.3871	0.2056	3.38	0.24	43.05"	0.0002"	2.73×10^{-8}"
Шолпан	0.7262	0.0068	3.86	0.6151	8.61"	0.0002"	2.78×10^{-9}"
Жер	1	0.0167	7.15	1	3.83"	0.0001"	8.81×10^{-10}"
S2	970	0.8839	134.18	16.00	78.99"	1.0829"	0.1274"
S38	1022	0.8201	171.1	19.20	41.73"	0.6496"	0.0885"
S55	780	0.7209	150.1	12.80	55.92"	0.7467"	0.0645"
S62	740	0.9760	72.76	9.90	771.81"	0.9619"	−3.0751"

4 ҚАРАҢҒЫ МАТЕРИЯНЫҢ ФЕРМИОНДЫҚ ЯДРОЛАРЫНЫҢ ГРАВИТАЦИЯЛЫҚ КОЛЛАПСЫНАН ПАЙДА БОЛҒАН АСА МАССИВТІ ҚАРА ҚҰРДЫМДАР

Галактика орталықтарында орналасқан АМҚҚ-дың пайда болуы, өсуі және табиғаты астрофизика мен космологиядағы шешілмеген мәселелер болып табылады. Шешілмеген маңызды сұрақтарға мыналар жатады: олар еріктілердің ең алыс квазарларында [128, 129] болатындай үлкен және тез өсе алады; жоғары z әлемінде АМҚҚ $\sim 10^8 - 10^9 M_\oplus$ құрайтын ҚҚ-дың табиғаты мен массасы [130], және хост галактикасының жалпы массасы мен оның орталық АМҚҚ бөлігінің массасы арасындағы байланыстың табиғаты қандай еріктілер [131].

Мұнда біз галактикаларының орталықтарындағы жоғары тығыздықтағы ҚМ аймақтарының гравитациялық күйреуінен туындайтын АМҚҚ эмбриондарының табиғаты мен қалыптасуы үшін жаңа парадигманы ұсынамыз [132]. Біз Керрдің қара құрдымының айналасындағы аккрециялық дискіден алынған осындай қара құрдым эмбриондарының толық Жалпы релятивистік құрылымда кейінгі өсуі бойынша есептеулерді ұсынамыз. [181] Осылайша, біз жоғарыда аталған үш негізгі сұраққа жауап беруге тырысамыз.

АМҚҚ-дардың шығу тегін түсіндіру үшін [131,133,134] әдебиетте әртүрлі сценарийлердің арасында талданған, біз оларды түзілу арнасына қарай екі негізгі категорияға бөлуімізге болады: (I) бариондық материямен байланысты арналар, яғни газ және жұлдыздар және (II) ерте ғаламның космологиясымен байланысты арналар. Бұл жұмыста біз жаңа, үшінші мүмкін сценарийді ұсынамыз: (III) ҚҚ-мен байланысты арналар. Осы жаңа құрылымды негіздемес бұрын, біз ең көп зерттелген қалыптастыру арналарының оң және теріс жақтарын бөліп көрсетеміз. Бариондық арналар (I) жағдайында біз (A) популяция жұлдыздары III және (б) қара құрдымға тікелей айналу(ҚҚТА). Шапалақ. III жұлдыздар-бұл Физикалық тұрғыдан негізделген (гипотетикалық болса да) жұлдыздар, орташа массасы $\sim 10^2 M_\oplus$ [135,136], z-жоғарыда диаметрі $\sim 10^6 M_\oplus$ болатын шағын гало түрінде орналасқан металдары жоқ бұлттарда пайда болды. Осылайша, мұндай массивтік жұлдыздардың жұлдызды күйреуі алғашқы миллиард жылда $\sim 10^9 M_\oplus$ АМҚҚ -ге жететін идеалистік аккреция жағдайында $\sim 10^2 M_\oplus$ ҚҚ әкеледі. Алайда, соңғы заманауи модельдеу көрсеткендей, < $\sim 10^3 M_\oplus$ бар ҚҚ күшті радиациялық кері байланыстың арқасында $z \sim 6$-да $\sim 10^8 M_\oplus$-ға дейін өнбейді [131]. ҚҚТА (b) сценарийінде ≈ 108 г массивтік гало орталығындағы тығыз газ шоғырлары Ғаламдық тұрақсыз болып, алдымен $\sim 10^4 - 10^5 M_\oplus$ аса массивті жұлдызға құлайды, содан кейін ядро Орталық қара құрдымға құлайды. Содан кейін жаңа туған нәресте қоршаған материалдың бірігуіне байланысты тез өседі, ол үлкен ҚҚ-мен аяқталады, салмағы $\sim 10^5 M_\oplus$ дейін [137,138,139]. Алдыңғы есептеулер көрсеткендей, бұл сценарийді жүзеге асырудың шарттары, мысалы, атомдық (молекулалық емес) газ түзуге қабілетті металл емес газды алу үшін сирек болуы мүмкін [140].

Алайда, N-тәрізді дененің соңғы гидродинамикалық модельдеулері ҚҚТА сценарийлері шығу тегін түсіндірудің ең қолайлы механизмдерінің бірі екенін көрсетеді [130, 141], дегенмен сандық ажыратымдылық мәселелері және феноменологиялық рецепттерді қолдану нәтижелердің ортақтығын шектейді [130].

Әр түрлі физикалық себептерге байланысты ерте ғаламмен байланысты қара құрдымдардың пайда болуы мен өсу арналары (II), галактикалар пайда болғанға дейін болған болар еді және бастапқы қара саңылауларды [142] немесе одан да көп экзотикалық үміткерлерді, мысалы, ғарыштық ілмектер-жолдар түріндегі топологиялық ақауларды [143] қамтиды. Алайда, мұндай процестердің байқау дәлелдері (тікелей немесе жанама) жоқ, өйткені олар бақылаулармен нашар жазылған өте ерте космологиялық дәуірлермен байланысты.

жазылған өте ерте космологиялық дәуірлермен байланысты.

Бұл жұмыс жоғары z Әлемінде АМҚҚ-дың қалыптасу арнасын ұсынады, ол жоғарыда талқыланған (I) және (II) арналардан тұжырымдамалық тұрғыдан ерекшеленеді. Бұл арнаның басты ерекшелігі – ол ерекше таза газ жиынтықтарына немесе Әлемнің ерте дәуіріне тәуелді емес. Керісінше, ол гало орталығында қалыптасатын тығыз фермиондық ҚМ ядроларының гравитациялық коллапсы мен кейінгі өсуіне негізделген. Мұндай жаңа тығыз ядро – сұйылтылған гало тығыздық үлестірімдері (профильдері) гало түзілуінің максималды энтропия өндірісі қағидасының МЭАП табиғи салдары болып табылады. Бұл жерде фермиондық (кванттық) бөлшектердің табиғаты тиісті түрде ескеріледі [132,144]. Біздің шынайы АМҚҚ түзілу теориямыз түпнұсқа болып табылады және ҚМ арқылы ұқсас түзілу сценарийлерімен шатастырылмауы керек. Мысалы, [145,146] жұмыстарында ұсынылғандай, ҚМ өзара әрекеттесулерін талап ететін гравито-термиялық апатты процестер.

Бұл мақала келесі құрылымда ұйымдастырылған: 4.1-бөлімде біз жаңа АМҚҚ-ның түзілу сценарийінің негізгі физикасын талқылаймыз және оның жоғары z Әлемінде қалай пайда болуы мүмкін екеніне нақты мысалдар келтіреміз. 4.2-бөлімде біз жаңа пайда болған ҚҚ-ның массасы мен айналымының уақыттық эволюциясының салыстырмалық теориясы негізіндегі есептеулерін ұсынамыз. Қорытынды бөлімде біз жұмысты қорытындылап, негізгі тұжырымдарды жасаймыз.

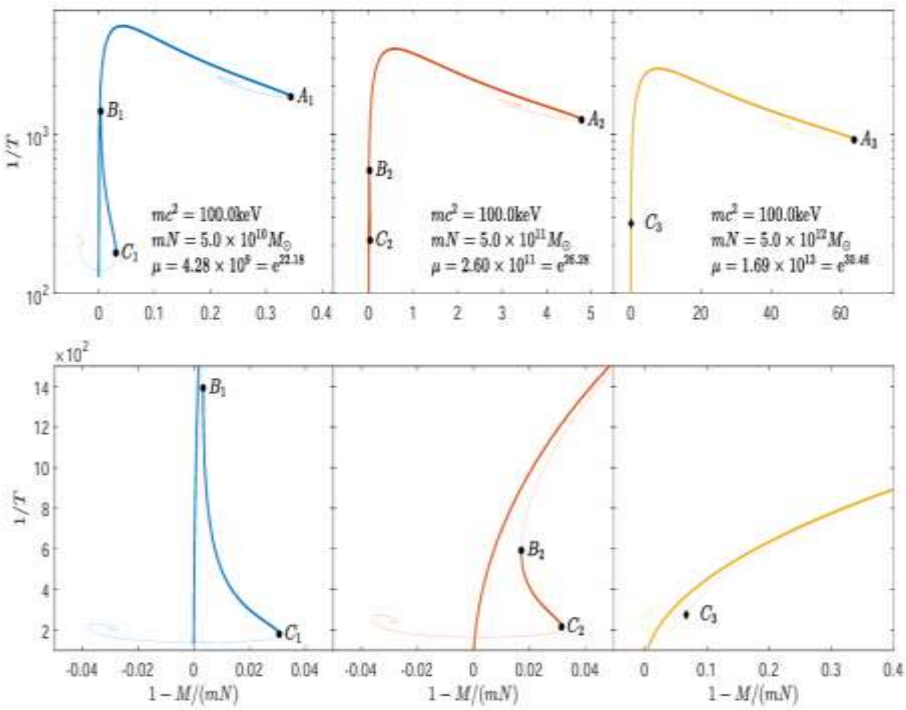
4.1 Аса массивті қара құрдымдардың қалыптасу механизмдері

ҚМ арнасы ерте ҚҚ-дарды қалыптастыру үшін ұсынылады және ЖҚМ космологияларындағы ҚМ гало түзілуінің жалпы теориясы аясында қарастырылады [132]. Бариондық ҚҚ-дардың түзілу арналарында [130] қолданылатын гидродинамикалық модельдеулерден айырмашылығы, мұнда ҚМ гало түзілуі өзін-өзі гравитациялайтын фермиондық жүйелердің релаксация соңында ірі масштабтағы энтропияны барынша арттыруына негізделген термодинамикалық тәсіл арқылы зерттеледі [132]. Бұл механизмнің негізгі тығыздық профилі гравитацияға қарсы Паули тыйым салу қысымымен қолдау тапқан тығыз және шағын ҚМ ядросын және оны қоршаған сұйылтылған галоны қамтиды. Мұндай фермиондық ядро-гало шешімдерінің алғашқы зерттеулері 1980-жылдары жүргізілді[147,148], кейіннен осы бағытта бірқатар жұмыстар жалғасты [149—163,т.б] Бұл модельдің неғұрлым шынайы нұсқасы, ол бөлшектердің булануын және орталық (фермиондық) дегенерацияны қамтиды, Жалпы салыстырмалылық аясында әзірленді [157] және (кеңейтілген) Ruffini-Argüelles-Rueda (RAR) моделі деп аталады. Бұл модельдің фермиондық галосы галактикалардың айналу қисықтарын түсіндіреді, ал дегенерацияланған фермиондық ядросы галактикалық орталықтарға қатысты маңызды салдарларға ие: ол орталық ҚҚ-ды еліктіре алады немесе сайып келгенде, соған айнала алады [132,157—161,]. Бұл жартылай аналитикалық тәсілдің негізгі артықшылығы – ол орталықтан бастап гало шетіне дейінгі релаксацияланған құрылымды егжей-тегжейлі сипаттауға мүмкіндік береді, ал N-дене модельдеулерде ішкі гало масштабтарындағы рұқсаттың шектеулі болуына байланысты бұл мүмкін емес.

Сонымен қатар, мұнда қолданылған термодинамикалық тәсіл дәстүрлі модельдеулерге қарағанда байытылған физикалық элементтерді қамтиды: (i) ЖС– АМҚҚ-ға қарай гравитациялық ҚМ ядросының коллапсын дұрыс сипаттау үшін қажет; (ii) Бөлшектердің кванттық табиғаты – профильдердегі фермион массасына тәуелділікті нақты көрсетуге мүмкіндік береді; (iii) Паули принципі – релаксациядағы фазалық кеңістіктегі таралу функциясына өздігінен енгізіледі, бұл жаңа ядро-гало профильдерінің пайда болуына ықпал етеді.

Қызықтысы, бұл теориялық негіз қараңғы материя бөлшектерінің ерте Әлемнен бастап вириялизация кезінде бейсызық құрылым түзілуінің кеш сатыларына дейінгі эволюциясын байланыстыруға мүмкіндік береді. ҚМ гало профильдерін алу үшін алдымен $O(КэВ)$ ҚМ фермиондары үшін сызықтық заттың қуат спектрі есептеледі, содан кейін вириалдық гало массасын M_{vir} және оған сәйкес қызыл ығысу Z_{vir} -ді алу үшін кеңейтілген Пресс-Шектер формализмі қолданылады (толығырақ нәтижелер үшін Қосымша және [132] қараңыз). Ақырында, біз фермиондық галоларды релаксацияның соңында МЭАП орын алады және вирильді массалық шектеулерге сәйкес келеді деп болжам жасау арқылы аламыз. Бұл МЭАП [150] еңбегінде Lynden-Bell нәтижелерін жалпылау арқылы енгізілген) Ферми-Дирак типіндегі ең ықтимал макроөлшемді ТФ алуға мүмкіндік береді (5-сілтемедегі теңдеу (1)-ді қараңыз), ол төрт еркін параметрге тәуелді: m – бөлшек массасы, β – өлшемсіз температура, θ – дегенерация параметрі және W – бөлшектің шекті энергиясы. Осы параметрлердің барлығы конфигурацияның орталығында (индексі 0) берілуі керек, осылайша RAR моделінің тепе-теңдік дифференциалдық теңдеулер жүйесін толық шешуге болады ([132] еңбегіндегі 8–12 теңдеулерді қараңыз). Төменде көрсететініміздей, RAR моделі қараңғы материя галосын да, олардың орталық АМҚҚ ядроларын да қалыптастыру үшін қолданылуы мүмкін.

Релаксацияның соңында осындай таралу функциясына (ТФ) ие болғаннан кейін, біз жалпы салыстырмалылық шеңберінде тепе-теңдік жағдайындағы фермиондық тығыздық профильдерінің толық тобын есептейміз. Олардың барлығы бөлшектердің жалпы саны N мен анықталады, сондықтан олар бірдей жалпы (Ньютондық) гало массасына ие болады ($M_{tot} \equiv M_{vir} = mN$). Осы мақсатта біз [132] Аргюлестің еңбегінде микроканондық ансамбль шеңберінде қолданылған термодинамикалық тәсілді ұстанамыз және осылайша мұндай тепе-теңдік шешімдер жиынтығының (термодинамикалық және динамикалық) тұрақтылығы мәселесін есептейміз. Яғни, өзін-өзі гравитациялайтын фермиондардың барлық тепе-теңдік шешімдері термодинамикалық тұрғыдан тұрақты бола бермейді.

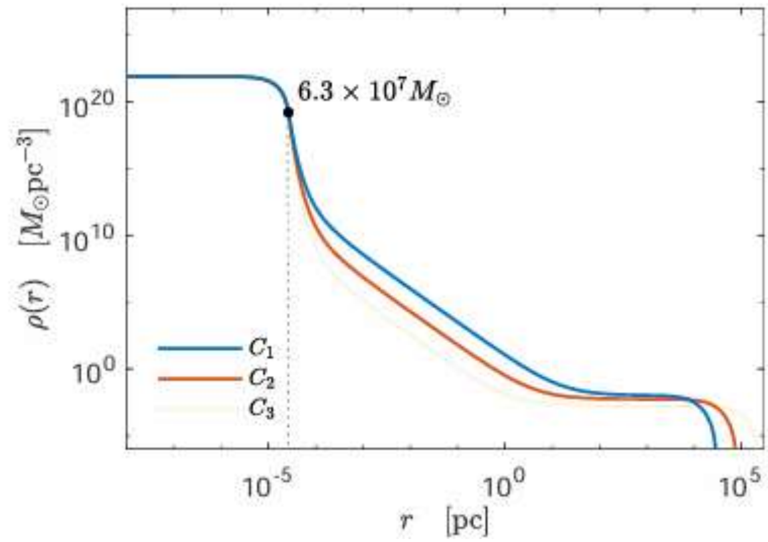


Сурет 4.1.1 – $mc^2 = 100 КэВ$ даркино массасы бар үш мысалдың критикалық шешімдері үшін калорикалық қисықтар: (1) $M_{vir} = 5 \times 10^{10} M_\otimes$ және $r_s = 30kpc$, (2) $M_{vir} = 5 \times 10^{11} M_\otimes$, және $r_s = 80kpc$, (c) $M_{vir} = 5 \times 10^{12} M_\otimes$ және $r_s = 250kpc$. Калориялық қисықтарды есептеу үшін қажетті шектеулер ($\mu = e^{w_0 - \theta_0}$ және N) сәйкес келетін критикалық шешімдерден алынады. x-ось бойынша, $1 - M/(mN)$ - бұл mN-мен нормаланған байланысты энергиясы (теріс белгімен). y-ось бойынша, T-бұл шексіздікке орналасқан бақылаушының өлшеуі бойынша жүйенің нормаланған температурасы. Жіңішке сызықтар тұрақсыз шешімдерді білдіреді, ал қалың сызықтар – тұрақты шешімдер. Тұрақтылықтың өзгеруі қара нүктемен белгіленген. c_1 және c_2 нүктелерінде соңғы тұрақты ядро-гало конфигурациясы бар, онда фермиондық ядро АМҚҚ-ға құлайды, оны астрофизикалық маңызы бар ҚМ гало қоршап тұрады. Қара ромбпен белгіленген c_3 нүктесіндегі ядро-гало шешімі c_1 және c_2 нүктелерімен бірдей критикалық ядро массасына ие, бірақ оны тұрақты тармақ алдын ала анықтамайды.

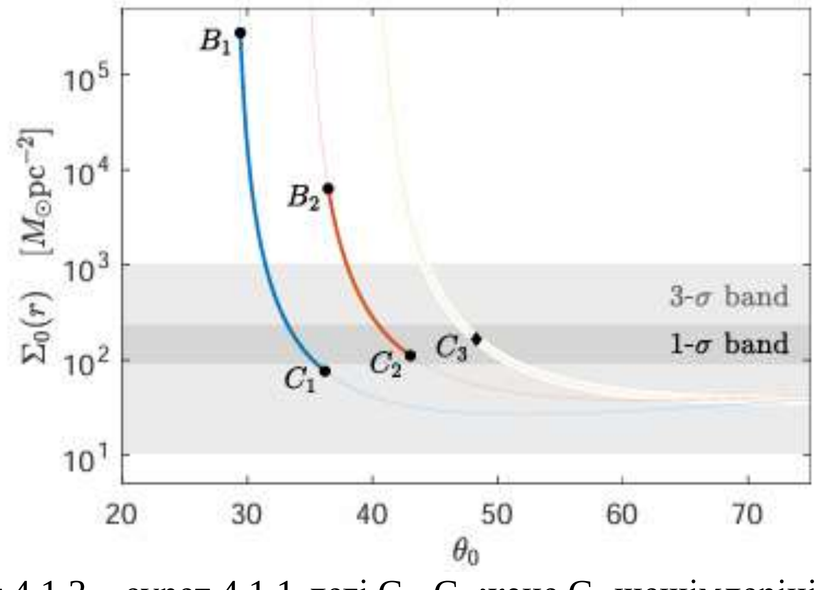
Жоғарыдағы (салыстырмалылыққа негізделген) термодинамикалық талдау негізінде біз алғаш рет жылулық қисықтағы C_i нүктесінде орналасқан сыни фермиондық ядроның бар екенін көрсетеміз. Бұл ядро шынайы астрофизикалық қолдануға сәйкес келетін ҚМ галонымен қоршалған (4.1.2-суреттегі ҚМ тығыздық профилдерін қараңыз, олар 4.1.1-суретпен және 4.1.3-суреттегі бақылау деректерімен сәйкестігі көрсетілген). Біз мұны бөлшектердің әдеттегі массасы үшін ~ (50, 345) кэВ аралығында, яғни m=100 кэВ үшін орындаймыз, содан кейін (4.3-бөлімді қараңыз) осы диапазондағы басқа бөлшек массаларын зерттейміз. Бөлшек массаларының осындай тар ауқымының маңыздылығы [157,158] еңбектерінен алынған нәтижелерге негізделеді. Ол жерде сыртқы гало галактикалардың айналу қисықтарына сәйкес келетін, ал қараңғы материя ядросы орталық қара құрдымды еліктей алатын ядро-гало RAR шешімдерін табуға болатыны көрсетілген (сондай-ақ Құс жолы мен Sgr A* туралы егжей-тегжейлі талдау үшін [159,160,161,] қараңыз).

4.1.1-суретте біз әртүрлі (Ньютондық) гало массалары үшін калорикалық қисықтардың үш нақты мысалын келтіреміз. Бұл қисықтар $M_{vir} = 5\times10^{10} M_{\otimes}$ пен $M_{vir} = 5\times10^{12} M_{\otimes}$ аралығындағы диапазонды қамтиды. Барлық тепе-теңдік жағдайлар арасынан тек $B_i - C_i$ (*i=1,2,3*) тармақтарында орналасқан ядро-гало шешімдері термодинамикалық және динамикалық тұрғыдан тұрақты болып табылады және космологиялық уақыт шкаласы бойынша сақталады Бұл туралы [132] еңбегінде егжей-тегжейлі түсіндірілген сондай-ақ, [162,164,167] еңбектерін қараңыз, онда қорап ішінде шектелген фермиондық жүйелер үшін ұқсас нәтижелер алынған. C_i нүктелерінде орналасқан ядро-гало шешімдері (4.1.2-суретті қараңыз) тұрақсыздық шегінде жатқан соңғы тұрақты конфигурацияға сәйкес келеді. Бұл нүктеде ҚМ ядросы салыстырмалылық әсерінен туындайтын гравитациялық коллапстың бастапқы сатысына өтеді және ҚҚ-ға құлайды.

Қызықты жайт, бөлшек массасы тұрақты m=100 кэВ болғанда, теория тұрақты $B_3 - C_3$ тармағының жоғалып кететін шекті жалпы гало массасын $M_{vir} = 5\times10^{12} M_{\otimes}$ деп болжайды (4.1.1-суреттің оң жақ панельдерін қараңыз). Метатұрақты (B−C) тармағы жалпы масса $M_ж$ (немесе бөлшектер саны N) артқан сайын кішірейеді. Сонымен қатар, белгілі бір шекті бөлшектер саны N^* болғанда, метатұрақты тармақ мүлде жойылып кетеді. Бұл құбылыс алғаш рет [164] және [168] еңбектерінде қорап ішінде шектелген жүйелер үшін көрсетілген. Бұл маңызды нәтиже, осы жұмыстағыдай, шынайы гало құрылымдарына қолданылғанда, біз неге $O(10^{12}) M_{\otimes}$ тәртібінен жоғары жалғыз вирилизденген галактикаларды бақыламайтынымызды түсіндіруі мүмкін, бұл өздігінен гравитацияланған жүйелердің термодинамикасының қаншалықты күшті екенін көрсетеді.



Сурет 4.1.2 – 4.1.1-суреттегі C_1, C_2 және C_3 шешімдеріне сәйкес келетін ядро-гало тығыздық профильдері көрсетілген. Мұнда ядро АМҚҚ-ға айналу үшін сыни массаға жеткен, ол $M_{crit} = M(r_c) = 6.3 \times 10^7 M_\otimes$ (қара нүктемен белгіленген). Бұл ядро астрофизикалық гало арқылы қоршалған (4.1.3-суретті қараңыз). Пунктирлі сызық толық дегенерацияланған ядро шешімін көрсетеді, осы шешімнен біз мұнда талданатын жалпы жартылай дегенерацияланған ядро-гало профильдерінің ядро радиусын r_c анықтаймыз.



Сурет 4.1.3 – сурет 4.1.1-дегі C_1, C_2 және C_3 шешімдерінің беткі тығыздық профильдері. Үзік сызық шамамен 3-σ қателіктерінің максималды шегін көрсетеді, бұл қателіктер Донато [17] жұмысында алынған

Сонымен қатар, мұндай гало-масса терезесінде, біз 4.1.3-суретте RAR шешімдерінің гало режимі ҚМ беткі тығыздық қатынасын қанағаттандыратындай қажетті морфологияға ие екенін көрсетеміз. Сондай-ақ, 4.1.2-суретте біз ҚМ өзегінің тұрақсыздығы басталғандағы осындай ядро-гало астрофизикалық шешімдерінің тығыздық профильдерін көрсетеміз, олардың барлығы типтік АМҚҚ-ға ие, массасы $M_{vir} = 6{,}3\times10^{7} M_{\otimes}$. Біз АМҚҚ-дың массасын толық ядро-гало шешімінің ядро радиусы r_c -де анықтадық, яғни $M_{crit} = M(r_c)$ мұндағы r_c сәйкес келетін толық дегерацияланған шешімнің беткі радиусымен сәйкес келеді (мысалы, тығыздық нөлге тең болатын жерде, 4.1.2-суретдегі нүктелі сызыққа қараңыз). Мұндай критикалық массаның сандық мәні жартылай аналитикалық теңдеу (4.1.1) арқылы жақсы жуықталуы мүмкін (тек толық дегерацияланған режимде жарамды), ол Оппенгеймер-Волкофф (ОВ) массасының шегі [169] болып табылады.

$$M_{crit} \approx 0{,}384\frac{m_{P1}^{3}}{m^{2}} \approx 6{,}274\times10^{9}\left(\frac{10к эB}{mc^{2}}\right)^{2} M_{\otimes} \tag{4.1.1}$$

мұндағы $m_{P1} = \sqrt{\hbar c/G} \approx 2{,}176\times10^{-5}\,g,$ —Планк массасы, ал m — қара иноздың массасы.

ҚМ өзектерінің осы критикалық масса жуықтауын қолданудың себебін оңай түсінуге болады, себебі мұнда қарастырылып отырған ядро-гало фермиондық шешімдері (4.1.2-суретті қараңыз) екі түрлі режимді қамтиды: жоғары дегерацияланған (кванттық) режимдегі фермиондық өзек (яғни, θ_0>10) толық дегерация жағдайына жақын, ол орталықтан алшақтау бойынша монотонды түрде классикалық режимге өтеді, бұл (Больцмандық) гало аймағына әкеледі (мұнда $\theta(r)\ll-1$). Ядроның коллапсы үшін дәстүрлі бұрылыс нүктесі тұрақсыздық критерийінің [170] соңғы (динамикалық және термодинамикалық) тұрақты шешіммен C_i нүктесінде калорикалық қисықтардағы эквиваленттілігі туралы толық түсіндірмелер [132] еңбегінің 4-бөлімінде және сол жерде келтірілген дереккөздерде берілген.

4.2 Қара құрдым массасы және спинінің эволюциясы

Біз Керр қара құрдығы айналасындағы дерлік геодезиялық жіңішке аккрециялық дискінің қарастырылуын [171,172,173] еңбектеріне сүйене отырып жүргіземіз. Аккреция процесінде зат пен сәуле қара құрдыққа энергия мен бұрыштық моментті тасымалдайды. Әсіресе, қара құрдыққа сәулеленудін/фотондардың кері әсерін есепке алу маңызды, өйткені олар қарсы момент тудырады [174], бұл қара құрдықтың шекті режимге ($a = M$) жетуіне жол бермейді. Бұл аккрецияланған массалық бөлшектер мен сәулеленудің қара құрдықты жалаңаш ерекшелікке айналдырмайтынын білдіреді [173]. dm арқылы қара құрдықтың координаталық уақыт аралығы dt ішінде жұтатын тыныштық массасын белгілейміз, сондықтан $\dot{m} = dm/\ dt$ -тыныштық масса аккрециясының жылдамдығы, ал $\dot{M}_{rad}$ және $\dot{M}_{rad}$ -қара құрдыққа сәулелену арқылы энергия мен бұрыштық момент тасымалдау жылдамдықтары. Қара құрдықтың массасы мен бұрыштық моментінің эволюциясын сипаттайтын теңдеулердің толық сипаттамасы үшін В қосымшасына жүгінеміз. Егер басқаша көрсетілмесе, біз c=G=1 болатын геометриялық бірліктерді қолданамыз.

Аккреция жылдамдығы және люминесценция

Біз тыныштық массасының ішке ағып келу жылдамдығын жергілікті балансты пайдаланып есептейміз, бұл теңіздік гравитациялық үдеу мен сәуле қысымы арасындағы теңгерімге негізделген, z координаты бойынша. Бұл шарт келесідей.

$$zR^{\tilde{z}}_{\tilde{o}\tilde{z}\tilde{o}} = kF(r), \tag{4.2.1}$$

мұндағы $k = 0{,}34cm^2g^{-1}$ - Томсон электрондарының шашырау опацистігі, R - Риман тензоры. Тағы да, $x = \sqrt{r/M}$ пайдалану арқылы (4.2.1) теңдеу мынадай болып шығады

$$\frac{3k\dot{m}}{8\pi z} f(x,\alpha) = 1, \tag{4.2.2}$$

мұндағы

$$f(x,\alpha) = \frac{x^3 g(x,\alpha)}{x^4 - 4\alpha x + 3\alpha^2}, \tag{4.2.3}$$

және

$$g(x,\alpha) = x - x_0 - \frac{3}{2}\alpha \ln\left(\frac{x}{x_0}\right) - 3(A_1 + A_2 + A_3), \tag{4.2.4}$$

мұндағы

$$A_1 = \frac{(x_1 - \alpha)^2}{x_1(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} \ln\left(\frac{x - x_1}{x_0 - x_1}\right). \tag{4.2.5}$$

Мұнда, x_1 , x_2 , x_3 тер $x^3 - 3x + 2a$ көпмүшелігінің түбірлері. A_2 және A_3 мүшелерін A_1 -ден {1, 2, 3} жиынындағы циклдік ретпен алу арқылы табуға болады. Белгілі бір α мәні мен тиісті $z = (r)$ өрнегі үшін, (4.2.2)-теңдеуі дәл бір шешімге ие болатын $\dot{m}$ мәні критикалық аккреция жылдамдығын $\dot{m}_{crit}$ анықтайды. Осыдан жоғары жылдамдықта диск супер-Эддингтоновтық режимге енеді және жұқа диск болжамы бұзылады. Тидальды гравитациялық тартылыс $z = H$ нүктесінде максималды мәнге жетеді. Сонымен қатар, жұқа диск болжамы дұрыс болады, егер дискінің жарты қалыңдығы $H < r$ шартын қанағаттандырса [175,176]. Осыған орай, $0 < \beta \leq 1$ параметрін енгізіп, $z = r$ [178] деп белгілеп, біз аккреция жылдамдығын есептейміз.

Мұндағы

$$\dot{m} \equiv \beta\dot{m}_{crit} = \frac{8\pi\beta M}{3k \max\left\{\frac{f(x,\alpha)}{x^2}\right\}}, \tag{4.2.6}$$

мұндағы $\max\left\{\frac{f(x,\alpha)}{x^2}\right\}$ - берілген радиуста максималды мәнді қабылдайтын функция, α үшін берілген. Жүйе шығарған қуатты есептеу үшін біз тек дискіні тастап, ҚҚ-на түспейтін фотондарды қарастырамыз. Бұл процедура энергияны ҚҚ-на беру жылдамдығын есептеу үшін эквивалентті, яғни (B5)-теңдеуді қолдану, бірақ C-ның орнына $1-C$ коэффициентін пайдаланып:

$$L_{source} = -\frac{2}{\pi}\int\limits_{r_0}^{\infty}\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi}(1-C)k_t f(r)dS. \tag{4.2.7}$$

Біз дискіні қайта фотондарды ұстап алу мүмкіндігін ескермейміз.

4.3 Керр қара құрдымы массасының өсуі

Эволюция теңдеулері:

$$\dot{M} = \dot{m}\varepsilon_0 + \dot{M}_{rad} \tag{4.3.1}$$

$$\dot{\alpha} = \frac{1}{M^2}\left(l_0\dot{m} + \dot{J}_{rad} - 2M\dot{M}\alpha\right) \tag{4.3.2}$$

Бұл жүйенің параметрлері мен өлшемсіз айнымалылар тұрғысынан теңдеулерді жазып, M-ге тәуелділікті айқын көрсету пайдалы. Осы мақсатта, келесі түрде жазайық:

$$M = M_i\tilde{M}, \tag{4.3.3}$$

$$\dot{m} = M_i\tilde{M}\beta\dot{\tilde{m}}, \tag{4.3.4}$$

$$\dot{M}_{rad} = M_i\tilde{M}\beta\dot{\tilde{m}}\tilde{M}_{rad}, \tag{4.3.5}$$

$$\dot{J}_{rad} = M_i^2\tilde{M}^2\beta\dot{\tilde{m}}\tilde{J}_{rad}, \tag{4.3.6}$$

$$l_0 = M_i\tilde{M}\tilde{l}_0, \tag{4.3.7}$$

Мұнда $\dot{\tilde{m}}, \tilde{M}_{rad}, \tilde{J}_{rad}$ және $\tilde{l}_0$ тек α – ға тәуелді функциялар болып табылады. Осы анықтамалармен (4.3.1) және (4.3.2) теңдеулер арасындағы қатынас шешімді келтіреді:

$$\tilde{M} = \exp\left\{\int\limits_{\alpha_i}^{\alpha}\frac{\varepsilon_0 + \tilde{M}_{rad}}{\tilde{l}_0 + \tilde{J}_{rad} - 2\alpha_*\left(\varepsilon_0 + \tilde{M}_{rad}\right)}d\alpha_*\right\}, \tag{4.3.8}$$

ҚҚ массасын өлшемсіз спин параметрі функциясы ретінде алу үшін (4.3.2) -теңдеуден мынадай нәтижені аламыз:

$$\Delta t = \frac{1}{\beta}\int_{\alpha_i}^{\alpha} \frac{1}{\tilde{\dot{m}}\left[\tilde{l}_0 + \tilde{J}_{rad} - 2\alpha_*\left(\varepsilon_0 + \tilde{M}_{rad}\right)\right]} d\alpha_*, \tag{4.3.9}$$

(4.3.8) және (4.3.9) теңдеулерінен біз қара құрдымның уақыт бойынша эволюциясының кейбір қасиеттерін анықтай аламыз: α(t) шешімі M -нен тәуелсіз, бірақ β параметріне байланысты. Сонымен қатар, жалпы шешім $\alpha(t,\beta)$ келесі қатынасты орындайды: $\alpha(t,\beta)=\alpha(\beta t,1)$. ҚҚ массасы бұл қасиетті (4.3.8) теңдеуі арқылы қабылдайды, сондықтан біз аламыз: $M(t,\beta)=M(\beta t,1)$. Осы заңдылық кез келген α және M функциясы үшін орындалады. Бұл қасиет $\beta=1$ үшін шешімді білу жеткілікті екенін көрсетеді, себебі басқа шешімдерді алу үшін тек t айнымалысын масштабтау және β дәрежесіне көбейту қажет. Мысалы, аккреция жылдамдығы мен шығарылатын қуат келесі қатынастарға бағынады: $\dot{m}(t,\beta)=\beta\dot{m}(\beta t,1)$ және $L_{source}(t,\beta)=\beta L_{source}(\beta t,1)$.

$M(t,\beta)$ және α(t) қасиеттері 4.3.1-суреттегі панельдерді қарастырғанда айқын көрінеді, мұнда біз бірнеше қара құрдымдардың эволюциясын $\beta=1, \beta=0{,}1$ және $\beta=0{,}01$ мәндері үшін уақыт пен космологиялық қызыл ығысу z_0 функциясы ретінде көрсетеміз. Космологиялық қызыл ығысу z_0 – гравитациялық байланысқан объектінің M_{vir} массасының қалыптасуына сәйкес келетін уақыт. t мен z арасындағы қатынас стандартты Лямбда суық қараңғы материя(ЛСҚМ) космологиясымен анықталады. Айта кету керек, α(t) қара құрдым массасына тәуелді емес, сондықтан жоғарғы сол жақ панельде тек үш қисық бар, әрқайсысы β -ның әртүрлі мәндеріне сәйкес келеді.

4.3.2-суретте біз аккреция жылдамдығының және ҚҚ шығарған қуаттың эволюциясын көрсетеміз. t-ның кішкентай мәндерінде аккреция жылдамдығының сәл төмендеуі (4.2.7) өрнектегі $\max\{f(x,\alpha)/x^2\}$ өскен сайын шамамен 5 есе көбейетіндіктен болады. $\alpha_i=0$ ден $\alpha_i=0{,}99775$-ке дейін ҚҚ-ның спинінің жоғарылауы $\sim 37/\beta$ млн жылды алады. Осы уақыт аралығында ҚҚ массасы M_i -ден шамамен $\sim 3M_i$- ге дейін өседі. $\dot{\alpha}\approx 0$ жағдайына жеткенде, ҚҚ массасы экспоненциалды түрде өседі. (4.3.1)-теңдеуді шешу арқылы біз кез келген ҚҚ-ның соңғы массаға $M_f > 3M_i$ дейін өсуі үшін қажет уақытты Δt-ны есептеуге мүмкіндік беретін қатынасты табамыз, мұнда бастапқы $\alpha_i=0$.

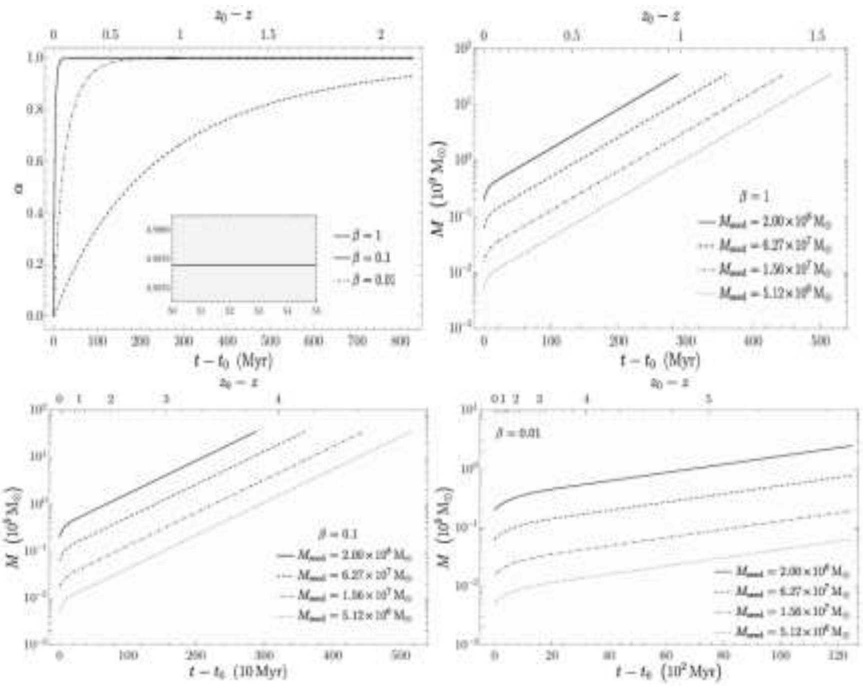
$$\Delta t = 6.2\times 10^7 \ln\left\{\frac{3M_f}{5M_i}\right\}\beta^{-1} \textit{жыл.} \tag{4.3.10}$$

Біздің нәтижеміз (4.1.1) теңдеуден алынған Хаиман және Лебтің нәтижесінен ерекшеленеді [177],

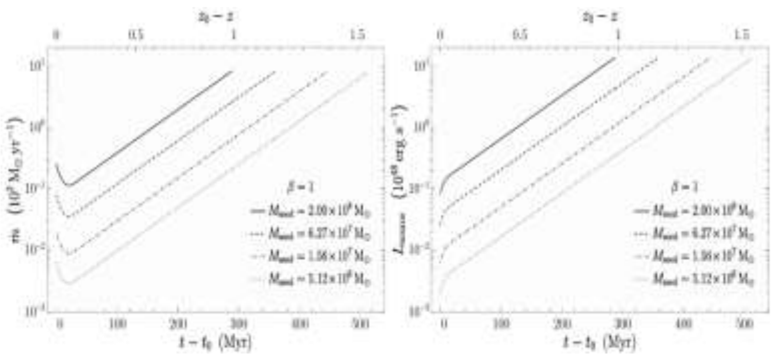
$$\Delta t_{HL} = 4\times10^{8}\,\varepsilon\ln\left\{\frac{M_f}{M_i}\right\}\beta^{-1}\,жыл. \qquad (4.3.11)$$

мұндағы $\varepsilon = L_{Source}/\dot{m}c^2$ – аккреция процесінің сәулелік тиімділігі. Айырмашылық екі себепке байланысты пайда болады: Біріншіден, қара құрдымның айналуын ескермеді[177], ал біздің әдісіміз оны өзара үйлесімді түрде қарастырады. 4.3.1-суретте қаныққан айналу күйіне ауысу кезінде ҚҚ-ның өсуі экспоненциалды қарқыннан да тезірек жүретінін көрсетеді. Екіншіден, олардың аккреция жылдамдығын анықтау әдісі Ньютондық гравитация мен сфералық-симметриялы сәулелік қысым арасындағы глобалдық тепе-теңдікке негізделген. Нәтижесінде, сәулелік тиімділік (4.3.11) теңдеуде тұрақты коэффициент ретінде көрінеді. Біздің анықтамамыз радиациялық қысым мен тік гравитация арасындағы салыстырмалы локалды тепе-теңдікті пайдаланады, бұл аккреция жылдамдығын арттырады[178]. Сондықтан, біздің тиімділігіміз ҚҚ-ның параметрлері M және α -ға тәуелді өзгереді.

Керр қара құрдымы үшін шекті тиімділікті $\varepsilon = 0.3$ деп ала отырып, $\Delta t < 0.52\Delta t_{HL}$ аламыз. Осылайша, біздің модель бойынша бастапқы массасы $M_i = 5\times10^6 M_\otimes$-дан $M_f = 5\times10^9 M_\otimes$ -қа дейін өсуі небәрі $\Delta t \approx 0.4$ млрд жыл уақыт алады. Атап айтқанда, біздің ҚМ арнамыз АМҚҚ-дың түзілуін түсіндіре алады. Бұл модельге сәйкес, $M_{vir} \sim 10^{11} M_\otimes$ болатын қараңғы материя галосы $z_0 \sim 7.5$ қызыл ығысуында түзілген жағдайда (А қосымшасын қараңыз), ол бастапқы массасы $M_i \sim 6.3\times10^7 M_\otimes$ болатын АМҚҚ-ды қамтуы мүмкін (яғни, бөлшек массасы m=100 кэВ үшін). Бұл ҚҚ стандартты аккреция жылдамдықтары кезінде $\Delta t \approx 0.2$ млрд жыл ішінде $M_f \equiv M = 3\times10^9 M_\otimes$ дейін өседі, бұл ең алыс (яғни, $z \sim 6$) және ең массивті бақылаулы квазардарының сипаттамаларына сәйкес келеді [134].



Сурет 4.3.1-Қара құрдым-дардың эволюция уақыты әртүрлі β=1 мәндері үшін көрсетілген. Бастапқы шарттар: $\alpha_i = 0$, қараңғы материя бөлшектерінің массалары 56 кэВ, 100 кэВ, 200 кэВ және 350 кэВ. Бастапқы қызыл ығысу мәні $z_0 = 5{,}5$, ал бастапқы уақыт $t_0 = 1022$ миллион жылға тең. Бұл қара құрдым массасы үшін айналу параметрі $M_{vir} = 5\times10^{11} M_{\otimes}$ гало массасына тәуелді емес.



Сурет 4.3.2-Қара құрдымдарының әртүрлі мәндері үшін аккреция жылдамдығының және көзіне қатысты жарықтылықтың эволюциясы уақыттың функциясы ретінде көрсетілген. Бұл жағдайда β=1. Бастапқы шарттар: $\alpha_i = 0$, қараңғы материя бөлшектерінің массалары 56 кэВ, 100 кэВ, 200 кэВ және 350 кэВ. Бастапқы қызыл ығысу мәні $z_0 = 5{,}5$, ал бастапқы уақыт $t_0 = 1022$ миллион жылға тең, гало массасы $M_{vir} = 5\times10^{11} M_{\otimes}$.

Бұл нәтиже АМҚҚ түзілуінің жаңа механизмін ұсынады, ол дәстүрлі бариондық сценарийлерден (мысалы, III популяциялы жұлдыздар) асып түседі. Себебі, олардың жеңіл қара құрдымдар $<10^3 M_{\otimes}$, $z \sim 6$ кезінде $\sim 10^8 M_{\otimes}$ массасына дейін де өсе алмайды [130].

ҚОРЫТЫНДЫ

Бұл жұмыста біз Эйнштейн өріс теңдеулерінің шешімдерін зерттедік: айналмайтын массаның гравитациялық өрісін сипаттайтын сыртқы дәл Эрез-Розен метрикасы мен баяу айналатын сәл деформацияланған массаның гравитациялық өрісін сипаттайтын Хартл-Торнның сыртқы жуық метрикасы, және пертурбатив әдісін қолдана отырып, айналу болмаған жағдайдағы олардың арасындағы байланыс таптық.

Біз Зипой-Вурхиз параметрі арқылы көрсетілген кездегі Эрез-Розен сызық элементі Хартл-Торн шешімімен сәйкес келетінін көрсеттік. Тиісінше, барлық монопольдік және квадрупольдік моменттер Герох-Хансен анықтамасы ұсынған инвариантты әдіспен есептелді. Яғни Эрез-Розен метрикасы мен Хартл-Торн шешімі арасындағы байланыс Герох-Хансен мультиполдық моменттері арқылы анықталды. Өрескел күшке немесе сынақ қатесіне жүгінбестен біз метрикалық функциялардың негізгі математикалық мәнін $s=-1$ таптық.[29]

Біз Эрез-Розен және Хартл-Торн метрикасын (айналу болмаған жағдайда) $\sim Q$ және $\sim M^2$ жуықтауында пертурбативтік әдіс арқылы зерттедік. Бұл жұмыста біз қолданған жуықтау физикалық және Ньютон физикасынан кейінгі аспан механикасының көптеген мәселелерін шешуге ыңғайлы. Біз Эрез-Розен жуық сызықты элементі Хартл-Торнмен сәйкес келетінін көрсеттік.

Героч-Хансен мультипольдік моменттерінің инвариантты анықтамасын қолдану бізге сәйкес монопольдық және квадрупольдық моменттер массасын есептеуге және екі шешімнің параметрлері арасындағы байланысты орнатуға көмектесті.

Сонымен қатар, Зипой-Вурхиз түрлендіруін қолдануды қажет етпей, $\sim Q$ және $\sim M^2$ жуықтауындағы координаттық түрлендірулердің айқын түрін көрсеттік. [38] (толық ақпаратты [30] қараңыз).

Соңғы нәтижелерге байланысты [39–42], Эрез-Розен және Зипой-Вурхиз шешімдері (q-метрикасы) арасындағы байланысты табу қызықты болады. Бұл болашақ зерттеу нысаны болады.

Бұл жұмыста біз баяу айналатын және аздап деформацияланған объектінің гравитациялық өрісіндегі сынақ бөлшектердің қозғалысын адиабаттық теория шеңберінде қарастырдық. Осы мақсатта Хартл-Торн метрикасы мен Керр метрикасы қолданылды, ол шамамен $1/c^2$ дәрежелі қатарға жіктеліп, гармоникалық координаталарда жазылды.

Перигелий ығысуының өрнегі Хартл-Торн метрикасы және Керр метрикасы үшін шығарылды. Орталық дененің айналуы мен деформациясының сынақ бөлшектер траекториясына әсері көрсетілді. Сондай-ақ, алынған формуланың релятивистік әсерлердің суперпозиция принципіне сәйкес келетіні дәлелденді, өйткені ол бастапқы массаның, бұрыштық моменттің және квадруполь моментінің шамалары арқылы берілген жуық шешімнің сипатын көрсетеді. Шектік жағдайларда перигелий ығысуының формуласы әдебиетте ұсынылған мәндерге сәйкес келеді.

Мысал ретінде, осы жұмыстың нәтижелері Күн жүйесінің ішкі планеталарына қолданылды. Күтілгендей, планеталардың қозғалысына негізгі әсер Күн массасына байланысты кеңістіктік-уақыттық қисықтық арқылы беріледі. Күннің айналуы мен деформациясын ескеру елеусіз рөл атқарғанымен, алынған перигелий ығысу формуласы экзопланеталық немесе басқа релятивистік жүйелерге де қолданылуы мүмкін, мұнда олардың әсері айтарлықтай болуы мүмкін.

Сондай-ақ, сынақ бөлшектердің экваторлық емес жазықтықтағы қозғалысын зерттеу қызықты болар еді. Бұл зерттеу барысында ұйытқу теориясы мен адиабаттық теорияны бірге қолдану қарастырылады. Бұл міндет болашақ зерттеулерде қарастырылады.

Бұл жұмыста біз Абдильдин әзірлеген адиабаттық теорияның негіздерін қарастырдық. Бұл формализмнің басты артықшылықтарының бірі – оны классикалық механикалық және салыстырмалық жүйелерге бірдей қолдануға болатындығы. Жалғыз қажетті енгізу – сәйкес жүйенің Лагранжианы. Сонымен қатар, қозғалыс теңдеулерін зерттеу бірінші интегралдар мен адиабаттық инварианттарды талдауға дейін қысқарады. Бұл әдіс аналитикалық шешімдері белгілі қарапайым Лагранжианның ұйытқуларын талдауға әсіресе ыңғайлы.

Жалпы салыстырмалылықтағы адиабаттық теорияны қолданудың нақты мысалы ретінде біз Керр метрикасы сипаттайтын гравитациялық өрістегі сынама бөлшектердің қозғалысын қарастырдық. Осы мақсатта Керр метрикасы $1/c^2$ дәрежесіне дейін қатарға жіктеліп, гармоникалық координаталарда өрнектелді. Нәтижесінде айналмалы жинақы объектінің экваторлық емес жазықтығында қозғалатын сынама бөлшектер үшін перигелий ығысу формуласы алынды.

Орталық дененің айналысының сынама бөлшектің қозғалысына әсері (бұрыштық импульстің екінші ретті мүшелеріне дейін) анық дәлелденді. Барлық нәтижелер орбита еңкею бұрышының перигелий ығысуына әсерін ескеру арқылы алынуы мүмкін. Әдебиетте ұсынылған басқа әдістермен салыстырғанда, бұл тәсіл елеулі артықшылық береді.

Біз адиабаттық теорияны қолданып, тек перигелий ығысу әсерін қарастырдық. Алайда, жер серіктері мен ғарыш аппараттарының орбиталарын дәл болжауға арналған басқа да әдістер бар. Барлық әдістердің артықшылықтары мен кемшіліктері бар, олар қажетті дәлдікке, уақыт ресурстарына, бастапқы деректердің қолжетімділігіне және есептеу қуатына байланысты өзгереді. Сондықтан бұл әдістер мен адиабаттық теорияны тікелей салыстыру осы жұмыстың аясынан тыс, әрі болашақ зерттеулердің тақырыбы болады.

Сонымен қатар, шешімнің жуық сипатта болуы – оның көздің массасы мен бұрыштық импульсі арқылы өрнектелуіне байланысты – перигелий ығысуының алынған формуласы салыстырмалық әсерлердің суперпозиция принципін қанағаттандыратынын көрсетті.[71,72]

Экваторлық жазықтықтағы перигелий ығысу формуласы шекті жағдайларда әдебиетте бұрын жарияланған мәндерге дейін қысқарады. Мұнда «суперпозиция принципі» классикалық физикадағы немесе электродинамикадағы секілді қолданылмайды, онда кейбір қорытылған шамалар (потенциал, күштер және т.б.) жеке сызықты шамалардың қосындысы ретінде анықталады. Оның орнына, біз «салыстырмалық әсерлердің суперпозиция принципін» қолданамыз, яғни қорытынды әсер көз параметрлерінің m_0, J және J^2 үлестері ретінде, басымдау мүшелерден аз әсер ететіндерге дейінгі қосынды түрінде өрнектелуі мүмкін, тіпті әсерлер сызықты болмаса да.

Күн жүйесінде Күн массасының басты параметр екені кеңінен танылған. Күннің массасының әсері, күтілгендей, бұрыштық импульстің әсерінен басымырақ. Алайда бұл деректер айналмалы аса массивті қара тесіктің маңындағы планеталар мен жұлдыздардың қозғалысын зерттеуге қолданылуы мүмкін [124,128–131]. Сонымен қатар, нәтижелерді пульсар планеталары үшін де қолдануға болады [132–134], мұнда орталық дененің айналуына байланысты салыстырмалық әсерлері Күн жүйесіне қарағанда айқынырақ байқалады.

Біз жоғары қызыл ығысу әлемінде АМҚҚ түзілуінің жаңа арнасын ұсындық, бұл арна бариондық материямен (массивті жұлдыздар) немесе алғашқы космологиямен байланысты емес. Оның орнына, ол ҚМ фермиондық тығыз ядроларының гравитациялық коллапсы арқылы ҚҚ-ға айналуына және одан кейінгі ҚҚ-ның аккреция арқылы өсуіне негізделген. Қара материяның фермиондық (кванттық) табиғатын ескергенде, ҚМ галактикаларында тығыз ядро және сұйық қабықтың тығыздық таралуы қалыптасады, бұл дәстүрлі N-дене симуляцияларында мүмкін емес [132, 144]. $50-345 кэВ$ аралығындағы фермиондық массалар үшін бұл баламалы сызықтық емес құрылым түзілуі тәсілі тұрақты ҚМ галактикаларын болжайды, олар бақылаулармен сәйкес келеді және гравитациялық коллапс шегінде тығыз ҚМ ядроларын ұстайды, олардың массалары $10^6-10^8 M_{\otimes}$ аралығында болады (II бөлімді қараңыз, мұнда WDM космологиясы $m=100 кэВ$ үшін талқыланған). Бұл тәсіл бариондық түзілу арналарының болжамдарынан айтарлықтай үлкен СМБҚ-ды ұсынады, соның ішінде ҚҚТА сценарийі де (4.1-бөлімді қараңыз).

Бұл жұмыста біз мұндай массивті ҚҚ-дардың массасы мен бұрыштық импульсінің уақытша эволюциясын стандартты, геодезиялық жалпы салыстырмалық диск аккреция моделі арқылы бағаладық. Біз радиация/фотондардың ҚҚ-ға кері әсерін өзіндік түрде есепке алдық (4.2-бөлімді қараңыз). Біз қорытынды бөлімде бұл АМҚҚ -лардың бірінші миллиард жыл ішінде массалары $\sim 10^9-10^{10} M_{\otimes}$ аралығына дейін өсуі мүмкін екенін нақты көрсетіп, бұл нәтижелер [181] ең алыс квазарлармен жақсы үйлесетінін атап өттік, бұл үшін шындыққа сай (немесе арнайы реттелген) аккреция жылдамдықтарын енгізудің қажеті жоқ. Қазіргі зерттеудің маңызды артықшылығы — бұл дәстүрлі бариондық арналардағыдай қысқа космологиялық уақыт аясында жұлдыздардың түзілуін қажет етпейді. Сонымен қатар, бұл әдіс қазіргі күні байқалатын орталық АМҚҚ массасы мен хост-галактикасының жалпы массасын ҚМ мен оның космологиялық эволюциясы тұрғысынан табиғи түрде байланыстырады.

ПАЙДАЛАНЫЛҒАН ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ

1 Kerr R.P. Gravitational field of a spinning mass as an example of algebraically special metrics. – Phys. Rev. Lett., 1963. – Vol. 11. – P. 237-238.

2 Papapetrou A. Einerotationssymmetrische Lösung in der allgemeinen Relativitätstheorie. – Annalen der Physik, 1953. – Vol. 447. – P. 309-315.

3 Weyl H. Zur gravitationstheorie. – Annalen der Physik, 1917. – Vol. 359. – P. 117-145. – doi:10.1002/andp.19173591804.

4 Zipoy D.M. Topology of some spheroidal metrics. – J. Math. Phys., 1966. – Vol. 7. – P. 1137–1143.

5 Goldstein H. Classical Mechanics. – Addison-Wesley Publishing Co., Inc., Reading, Mass., 1950. – P. 238.

6 Matzner R.A., Misner C. W. Phys. Rev., 1967. – Vol. 154. – P. 1229.

7 Stephani H., Kramer D., MacCallum M., Hoenselaers C., Herlt E. Exact Solutions of Einstein's Field Equations. – Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2003.

8 Boshkayev K., Quevedo H., Ruffini R. Gravitational field of compact objects in general relativity. – Phys. Rev. D, 2012. – Vol. 86. – P. 064043.

9 Erez G., Rosen N. The gravitational field of a particle possessing a quadrupole moment. – Bull. Res. Counc. Israel, 1959. – Vol. 8. – P. 47.

10 Hartle J.B. Slowly rotating relativistic stars. I. Equations of structure. – Astrophys. J., 1967. – Vol. 150. – P. 1005.

11 Hartle J. B., Thorne K. S. Slowly rotating relativistic stars. II. Models for neutron stars and supermassive stars. – Astrophys. J., 1968. – Vol. 153. – P. 807.

12 Doroshkevich A. G., Zel'Dovich Y. B., Novikov I. D. Gravitational collapse of nonsymmetric and rotating masses. – Sov. J. Exp. Theor. Phys., 1966. – Vol. 22. – P. 122.

13 Winicour J., Janis A. I., Newman E. T. Static, axially symmetric point horizons. – Phys. Rev., 1968. – Vol. 176. – P. 1507-1513.

14 Young J. H., Coulter C. A. Exact metric for a nonrotating mass with a quadrupole moment. – Phys. Rev., 1969. – Vol. 184. – P. 1313-1315.

15 Zeldovich Y. B., Novikov I. D. Relativistic Astrophysics. Volume 1: Stars and Relativity. – University of Chicago Press, Chicago, IL, USA, 1971.

16 Quevedo H., Parkes L. Geodesies in the Erez-Rosen space-time. – Gen. Relativ. Gravit., 1989. – Vol. 21. – P. 1047-1072.

17 Quevedo H. General static axisymmetric solution of Einstein's vacuum field equations in prolate spheroidal coordinates. – Phys. Rev. D, 1989. – Vol. 39. – P. 2904-2911.

18 Quevedo H. Multipole moments in general relativity static and stationary vacuum solutions. – Fortschritte der Physik, 1990. – Vol. 38. – P. 733-840.

19 Quevedo H., Mashhoon B. Exterior gravitational field of a rotating deformed mass. – Phys. Lett. A, 1985. – Vol. 109. – P. 13-18.

20 Quevedo H., Mashhoon B. Exterior gravitational field of a charged rotating mass with arbitrary quadrupole moment. – Phys. Lett. A, 1990. – Vol. 148. – P. 149-153. – doi:10.1016/0375-9601(90)90770-O.

21 Lewis T. Some Special Solutions of the Equations of Axially Symmetric Gravitational Fields. – Proc. R. Soc. Lond. Ser. A, 1932. – Vol. 136. – P. 176-192.

22 Bini D., Geralico A., Luongo O., Quevedo H. Generalized Kerr spacetime with an arbitrary mass quadrupole moment: geometric properties versus particle motion. – Class. Quantum Gravity, 2009. – Vol. 26. – P. 225006.

23 Stergioulas N. Rotating stars in relativity. – Living Rev. Relativ., 2003. – Vol. 6. – P. 3.

24 Boshkayev K., Rueda J. A., Ruffini R., Siutsou I. On general relativistic uniformly rotating white dwarfs. – Astrophys. J., 2013. – Vol. 762. – P. 117.

25 Urbanec M., Miller J. C., Stuchlík Z. Quadrupole moments of rotating neutron stars and strange stars. – Mon. Not. Roy. Astr. Soc., 2013. – Vol. 433. – P. 1903-1909.

26 Yagi K., Kyutoku K., Pappas G., Yunes N., Apostolatos T. A. Effective no-hair relations for neutron stars and quark stars: Relativistic results. – Phys. Rev. D, 2014. – Vol. 89. – P. 124013.

27 Mashhoon B., Theiss D. S. Relativistic lunar theory. – Nuovo Cimento B Serie, 1991. – Vol. 106. – P. 545–571.

28 Frutos-Alfaro F., Soffel M. On relativistic multipole moments of stationary space-times. – R. Soc. Open Sci., 2018. – Vol. 5. – P. 180640.

29 Boshkayev K., Quevedo H., Nurbakyt G., Malybayev A., Urazalina A. The Erez–Rosen Solution Versus the Hartle Thorne Solution. – Symmetry, 2019. – Vol. 11. – P. 1324.

30 Boshkayev K., Malybayev A. , Quevedo H., Nurbakyt G. , Taukenova A., Urazalina A., The correspondence of the Erez-Rosen solution with the Hartle-Thorne solution in the limiting case of ~Q and ~M^2 // News of the National Academy of science of the Republic of Kazakhstan: Physico-Mathematical Series, - 2020, -Vol.5, -P.19 – 27

31 Quevedo H., Toktarbay S., Aimuratov Y. Quadrupolar gravitational fields described by the q metric. – arXiv, 2013. – arXiv:1310.5339.

32 Quevedo H. Multipolar solutions // arXiv. – 2012. – arXiv:1201.1608.

33 Voorhees B. H. Static axially symmetric gravitational fields // Phys. Rev. D. – 1970. – Vol. 2. – P. 2119–2122.

34 Geroch R. Multipole moments. I. Flat space. – J. Math. Phys., 1970. – Vol. 11. – P. 1955–1961.

35 Hansen R. O. Multipole moments of stationary space-times. – J. Math. Phys., 1974. – Vol. 15. – P. 46–52.

36 Ernst F. J. New formulation of the axially symmetric gravitational field problem. – Phys. Rev., 1968. – Vol. 167. – P. 1175–1177.

37 Frutos-Alfaro F., Quevedo H., Sanchez P. A. Comparison of vacuum static quadrupolar metrics. – R. Soc. Open Sci., 2018. – Vol. 5. – P. 170826.

38 Bini D., Boshkayev K., Ruffini R., Siutsou I. Equatorial Circular Geodesics in the Hartle-Thorne Spacetime. – Il Nuovo Cimento C, 2013. – Vol. 36. – P. 31.

39 Frutos-Alfaro F., Soffel M. On the post-linear quadrupole-quadrupole metric. – Revista de Matematica: Teoria y Aplicaciones, 2017. – Vol. 24. – P. 239.

40 Boshkayev K.A., Quevedo H., Abutalip M.S., Kalymova Z.A., Suleymanova S.S. Geodesics in the field of a rotating deformed gravitational source. – Int. J. Mod. Phys. A, 2016. – Vol. 31. – P. 1641006.

41 Boshkayev K., Gasperín E., Gutiérrez-Piñeres A.C., Quevedo H., Toktarbay S. Motion of test particles in the field of a naked singularity. – Phys. Rev. D, 2016. – Vol. 93. – P. 024024.

42 Allahyari A., Firouzjahi H., Mashhoon B. Quasinormal modes of a black hole with quadrupole moment. – Phys. Rev. D, 2019. – Vol. 99. – P. 044005.

43 Allahyari A., Firouzjahi H., Mashhoon B. Quasinormal Modes of Generalized Black Holes: delta-Kerr Spacetime. – arXiv, 2019. – arXiv:1908.10813.

44 Schwarzschild K. On the Gravitational Field of a Mass Point According to Einstein's Theory // Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Phys.Math. – 1916. – Vol. 1. – P. 189.

45 Misner C.W., Thorne K.S., Wheeler J.A. Gravitation. – San Francisco: W.H. Freeman Press, 1973.

46 Ohanian H.C., Ruffini R. Gravitation and Spacetime, third edition. – Cambridge University Press, 2013.

47 Lense J., Thirring H. Phys. Z. – 1918. – Vol. 19. – P. 156.

48 Berti E., Stergioulas N. Approximate matching of analytic and numerical solutions for rapidly rotating neutron stars // Mon. Not. R. Astron. Soc. – 2004. – Vol. 350. – P. 1416.

49 Abishev M.E., Boshkayev K.A., Dzhunushaliev V.D., Ivashchuk V.D. Dilatonic dyon black hole solutions // Classical and Quantum Gravity. – 2015. – Vol. 32, no. 16. – P. 165010.

50 Abishev M.E., Boshkayev K.A., Ivashchuk V.D. Dilatonic dyon-like black hole solutions in the model with two Abelian gauge fields // European Physical Journal C. – 2017. – Vol. 77, no. 3. – P. 180.

51 Belissarova F.B., Boshkayev K.A., Ivashchuk V.D., Malybayev A.N. Special dyon-like black hole solution in the model with two Abelian gauge fields and two scalar fields // Journal of Physics Conference Series. – 2020. – Vol. 1690. – P. 012143.

52 Malybayev A.N., Boshkayev K.A., Ivashchuk V.D. Quasinormal modes in the field of a dyon-like dilatonic black hole // European Physical Journal C. – 2021. – Vol. 81, no. 5. – P. 475.

53 Abdil'din M.M. Mechanics of Einstein's gravitation theory [Mekhanika teorii gravitatsii Ehjnshtejna]. – Alma-Ata: Nauka, 1988 (in Russ).

54 Abdil'din M.M. The problem of motion of bodies in General Relativity [Problema dvizhenia tel v obshchey teorii otnositel`nosti]. – Almaty: Qazaq Universiteti, 2006 (in Russ).

55 Fock V.A. Theory of space, time and gravitation. – Pergamon Press–Macmillan Company, 1961.

56 Infeld L. Equations of Motion in General Relativity Theory and the Action Principle // Reviews of Modern Physics. – 1957. – Vol. 29, no. 3. – P. 398.

57 Infeld L., Plebanski E. Motion and relativism [Dvijenie i relativizm]. – Moskow: Nauka, 1962 (in Russ).

58 Henrard, J. The Adiabatic Invariant in Classical Mechanics // In: Jones, C.K.R.T., Kirchgraber, U., Walther, H.O. (eds.) Springer, Berlin, 1993, pp. 117–235. https://doi.org/10.1007/978-3-642-61232-9_4.

59 Fock, V.A. The Theory of Space, Time and Gravitation. Pergamon Press – Macmillan Company, Oxford, 1964.

60 Boshkayev, K., Quevedo, H., Ruffini, R. Gravitational field of compact objects in general relativity // Phys. Rev. D. – 2012. – Vol. 86, no. 6. – P. 064043. https://doi.org/10.1103/PhysRevD.86.064043. arXiv:1207.3043 [gr-qc].

61 Landau L.D., Lifshitz E.M. The Classical Theory of Fields. – Oxford: Butterworth-Heinemann, 1994.

62 Shapiro S.L., Teukolsky S.A. Black Holes, White Dwarfs and Neutron Stars. – Weinheim: Wiley-VCH, 1983.

63 Stephani H., Kramer D., MacCallum M., Hoenselaers C., Herlt E. Exact Solutions of Einstein’s Field Equations. – Cambridge: Cambridge University Press, 2009.

64 Stuchlík Z., Slaný P., Török G. LNRF-velocity hump-induced oscillations of a Keplerian disc orbiting near-extreme Kerr black hole: a possible explanation of high-frequency QPOs in GRS 1915+105 // Astron. Astrophys. – 2007. – Vol. 470, no. 2. – P. 401–404.

65 Torok G., Bakala P., Sramkova E., Stuchlik Z., Urbanec M. On mass constraints implied by the relativistic precession model of twin-peak Quasi-periodic oscillations in Circinus X-1 // Astrophys. J. – 2010. – Vol. 714, no. 1. – P. 748–757.

66 Zhang F., Lu Y., Yu Q. On testing the Kerr metric of the massive black hole in the galactic center via stellar orbital motion: full general relativistic treatment // Astrophys. J. – 2015. – Vol. 809, no. 2. – P. 127.

67 Boshkayev K., Idrissov A., Luongo O., Malafarina D. Accretion disc luminosity for black holes surrounded by dark matter // Mon. Not. Roy. Astr. Soc. – 2020. – Vol. 496, no. 2. – P. 1115–1123.

68 Bambhaniya P., Solanki D.N., Dey D., Joshi A.B., Joshi P.S., Patel V. Precession of timelike bound orbits in Kerr spacetime // Eur. Phys. J. C. – 2021. – Vol. 81, no. 3. – P. 205.

69 Boshkayev K., Konysbayev T., Kurmanov E., Luongo O., Malafarina D., Quevedo H. Luminosity of accretion disks in compact objects with a quadrupole // Phys. Rev. D. – 2021. – Vol. 104, no. 8. – P. 084009.

70 Shahzadi M., Kološ M., Stuchlík Z., Habib Y. Epicyclic oscillations in spinning particle motion around Kerr black hole applied in models fitting the Quasi-periodic oscillations observed in microquasars and AGNs // Eur. Phys. J. C. – 2021. – Vol. 81, no. 12. – P. 1067.

71 Boshkayev K., Nurbakyt G., Quevedo H., Suliyeva G., Taukenova A. S., Tlemissov A., Tlemissova Zh., Urazalina A., Stuchlık Z., “Adiabatic theory in Kerr spacetimes” // General Relativity and Quantum Cosmology, -2024. -Vol. 56. -№. 67

72 Suliyeva G. B., Boshkayev K., Nurbakyt G., Quevedo H., Taukenova A. S., Tlemissov A. T., Tlemissova Zh. A., Urazalina A., Adiabatic theory of motion of bodies in the Hartle-Thorne spacetime // International Journal of Mathematics and Physics. -2022, -Vol. 13,- №1.

73 Török G., Kotrlová A., Matuszková M., Klimovičová K., Lančová D., Urbancová G., Šrámková E. Simple analytic formula relating the mass and spin of accreting compact objects to their rapid X-ray variability // Astrophys. J. – 2022. – Vol. 929, no. 1. – P. 28.

74 Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика. – М., 1973. – 207 с.

75 Дубошин Г.Н. Небесная механика. Основные задачи и методы. – М., 1968. – 799 с.4

76 Абдильдин М.М. Механика теории гравитации Эйнштейна. – Алма-Ата: Наука, 1988. – 200 с.

77 Абдильдин М.М. Проблема движения тел в общей теории относительности. – Алматы: Қазақ Университеті, 2006. – 132 с.

78 Брумберг В.А. Релятивистская небесная механика. – М.: Наука, 1972.

79 Абдильдин М.М., Баимбетов Ф.Б., Жусупов М.А., Кожамкулов Т.А., Рамазанов Т.С., Омаров М.С. Исследование проблем фундаментальных взаимодействий в теоретической физике. – Алматы, 1997. – 141 с.

80 Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 536 с.

81 Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 224 с.

82 Фок В.А. Теория пространства, времени и тяготения. – М.: Наука, 1961.

83 Will C.M. Theory and experiment in gravitational physics. – Revised edition. – Cambridge University Press, 1993.

84 Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. – М., 1973. – 400 с.

85 Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М., 1962. – 1094 с.

86 Ольховский И.И. Курс теоретической механики для физиков. – М., 1974. – 569 с.

87 Иваницкая О.С. Лоренцев базис и гравитационные эффекты в эйнштейновской теории тяготения. – Минск, 1979. – 334 с.

88 Абдильдин М.М. Механика теории гравитации Эйнштейна. – Алма-Ата, 1988. – 198 с.

89 Абдильдин М.М., Баимбетов Ф.Б., Жусупов М.А., Кожамкулов Т.А., Рамазанов Т.С., Омаров М.С. Исследование проблем фундаментальных взаимодействий в теоретической физике. – Алматы, 1997. – 141 с.

90 Абдильдин М.М. Адиабатическая теория движения тел в ОТО // Движение тел в релятивистской теории гравитации; Тезисы докл. второго всесоюзного симпозиума. – Вильнюс-Каунас, 1986. – С. 6-7.

91 Абдильдин М.М., Омаров М.С. Адиабатическая теория движения тел в ОТО // Современные теоретические и экспериментальные проблемы теории относительности и гравитации; Материалы VII Всесоюзной конференции. – Ереван, 1988. – С. 3-4.

92 Abdildin M.M. Adiabatic theory of body motion in GR Mechanics // 15th International Conference, Pune (India), 16-21 December, 1997. – Pune, 1997. – P. 70-71.

93 Абдильдин М.М. О метрике вращающегося жидкого шара // Вопросы теории поля. – Алма-Ата, 1985. – С. 20-25.

94 Абдильдин М.М., Омаров М.С. Анализ корректной метрики первого приближения в методе Фока в ОТО // Проблемы физики звезд и внегалактической астрономии. – Алматы, 1993. – С. 170-178.

95 Абдильдин М.М., Омаров М.С. Об оптимизации выбора векторных элементов в адиабатической теории движения тел в ОТО // Известия НАН РК. – Алматы, 1994. – №4, сер. физ.-мат. – С. 17-21.

96 Abdildin M.M., Omarov M.S., Abishev M.E. On optimization of the choice of vector elements in an adiabatic theory of body motion in General Relativity // Gravitation Cosmology. – 2001. – Vol. 7, №4(28). – Pp. 332-332.

97 Boshkayev K.A., Quevedo H., Abishev M.E., Toktarbay S., Aimuratov Ye.K. Correspondence of Fock and Hartle-Thorne metrics [Sootvetstvie metric Foka i Hartla Torna] // News of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan. – 2013. – Vol. 4, no. 290. – P. 3 (in Russ).

98 Landau L.D. and Lifshitz E.M. Mechanics, third edition. – Dover Publications, 1976.

99 Landau L.D. and Lifshitz E.M. The classical theory of fields, fourth edition. – Butterworth-Heinemann, 1975.

100 Boshkayev K.A., Kalymova Zh.A., Abdualiyeva B.S., Brisheva Zh. N., and Taukenova A.S. Investigation of a test particle motion in the equatorial plane of the axially symmetric gravitational field in terms of the adiabatic theory // Recent contributions to physics. – 2018. – Vol. 1, no. 1. – P. 64 (in Kaz).

101 Park R.S., Folkner W.M., Konopliv A.S. and et al. Precession of Mercury's Perihelion from Ranging to the MESSENGER Spacecraft // Astrophysical Journal. – 2017. – Vol. 153, no. 3. – P. 121.

102 Kippenhahn R. and Weigert A. Stellar Structure and Evolution. – Springer-Verlag, 1994.

103 Will C.M. Theory and experiment in gravitational physics. – Cambridge University Press, 1993.

104 Stewart J. Advanced General Relativity. Cambridge University Press, Cambridge – 1993.

105 Boshkayev K.A., Suleymanova S.S., Zhami B.A., Taukenova A.S., Aimuratov Y.K. Correspondence of the Fock and the Kerr metrics. News Natl. Acad. Sci. Repub. Kaz. 3(301), 43–48 – 2015 (in Russ).

106 Ruiz E. Harmonic coordinates for Kerr's metric. Gen. Relativ. Gravit. 18, 805–811 – 1986. https://doi.org/10.1007/BF00770202.

107 Abe M., Ichinose S., Nakanishi N. Kerr Metric, de Donder condition and gravitational energy density. Progress Theoret. Phys. 78(5), 1186–1201 – 1987. https://doi.org/10.1143/PTP.78.1186.

108 Liu Q.H. The most general harmonic coordinates for Kerr metric. Chin. Phys. Lett. 15(5), 313–314 – 1998. https://doi.org/10.1088/0256-307X/15/5/001.

109 Aguirregabiria J.M., Bel L., Martin J., Molina A., Ruiz E. Comparing metrics at large: harmonic vs quo-harmonic coordinates. Gen. Relativ. Gravit. 33(10), 1809–1837 – 2001. https://doi.org/10.1023/A:1013083419220.

110 Bicak J., Katz J. On the uniqueness of harmonic coordinates. Czech J. Phys. 55(2), 105–118 – 2005. https://doi.org/10.1007/s10582-005-0024-z.

111 Jiang C., Lin W. Harmonic metric for Kerr black hole and its post-Newtonian approximation. Gen. Relativ. Gravit. 46, 1671 – 2014. https://doi.org/10.1007/s10714-014-1671-9.

112 Misner C.W., Thorne K.S., Wheeler J.A. Gravitation. W.H. Freeman Press, San Francisco – 1973.

113 Poisson E., Will C.M. Gravity: Newtonian, Post-Newtonian, Relativistic. Cambridge University Press, Cambridge – 2014.

114 Brumberg V.A. Essential Relativistic Celestial Mechanics. Adam Hilger, Bristol – 1991.

115 Stuchlik Z., Klimovicova K., Schee J., Torok G., Kotrlova A. Comparison of the Hartle–Thorne model of neutron stars with its Kerr approximation by using resonant switch model. Acta Astronomica 71(4), 311–341 – 2021. https://doi.org/10.32023/0001-5237/71.4.4.

116 Arce-Gamboa J.R., Frutos-Alfaro F. Classical general relativity effects to second order in mass, spin, and quadrupole moment. J. Phys. Commun. 3(8), 085018 – 2019. https://doi.org/10.1088/2399-6528/ab3b78. arXiv:1901.07541 [gr-qc].

117 Iorio L. Constraining the angular momentum of the sun with planetary orbital motions and general relativity. Sol. Phys. 281(2), 815–826 – 2012. https://doi.org/10.1007/s11207-012-0086-6. arXiv:1112.4168 [gr-qc].

118 Kato Y., Miyoshi M., Takahashi R., Negoro H., Matsumoto R. Measuring spin of a supermassive black hole at the Galactic centre–implications for a unique spin. Mon. Not. Roy. Astr. Soc. 403(1), 74–78 – 2010. https://doi.org/10.1111/j.1745-3933.2010.00818.x. arXiv:0906.5423 [astro-ph.GA].

119 Gillessen S., Plewa P.M., Eisenhauer F., Sari R., Waisberg I., Habibi M., Pfuhl O., George E., Dexter J., von Fellenberg S., Ott T., Genzel R. An update on monitoring stellar orbits in the galactic center. Astrophys. J. 837(1), 30 – 2017. https://doi.org/10.3847/1538-4357/aa5c41. arXiv:1611.09144 [astro-ph.GA].

120 Volonteri M. Formation and evolution of supermassive black holes // Science. – 2012. – Vol. 337. – P. 544

121 Woods T. E. et al. Formation of direct collapse black holes // PASA. – 2019. – Vol. 36. – P. e027

122 Zhu Q., Li Y., Li Y., Maji M., Yajima H., Schneider R., Hernquist L. Galaxy evolution and dark matter // MNRAS. – 2022. – Vol. 514. – P. 5583

123 Volonteri M., Habouzit M., Colpi M. Supermassive black hole formation // Nature Rev. Phys. – 2021. – Vol. 3. – P. 732

124 Arguelles C. R. et al. Constraints on self-interacting dark matter // MNRAS. – 2021. – Vol. 502. – P. 4227

125 Inayoshi K., Visbal E., Haiman Z. Formation of supermassive black holes // ARA&A. – 2020. – Vol. 58. – P. 27

126 Mirabel I. F., Rodriguez L. F. Relativistic jets in black hole binaries // New A Rev. – 2022. – Vol. 94. – P. 101642

127 Madau P., Rees M. J. The formation of early galaxies // ApJ. – 2001. – Vol. 551. – P. L27

128 Hosokawa T., Hirano S., Kuiper R., Yorke H. W., Omukai K., Yoshida N. Formation of the first massive stars // ApJ. – 2016. – Vol. 824. – P. 119

129 Begelman M. C., Volonteri M., Rees M. J. Formation of massive black holes // MNRAS. – 2006. – Vol. 370. – P. 289

130 Begelman M. C., Rossi E. M., Armitage P. J. Accretion processes in astrophysics // MNRAS. – 2008. – Vol. 387. – P. 1649

131 Woods T. E., Heger A., Whalen D. J., Haemmerle L., Klessen R. S. Formation of direct collapse black holes // PASA. – 2017. – Vol. 842. – P. L6

132 Habouzit M., Volonteri M., Latif M., Dubois Y., Peirani S. Formation of massive black hole seeds // MNRAS. – 2016. – Vol. 463. – P. 529

133 Latif M. A., Whalen D. J., Khochfar S., Herrington N. P., Woods T. E. Formation of early black holes // Nature. – 2022. – Vol. 607. – P. 48

134 Carr B., Kuhnel F. Primordial black holes as dark matter candidates // Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. – 2020. – Vol. 70. – P. 355

135 Bramberger S. F., Brandenberger R. H., Jreidini P., Quintin J. Cosmological implications of modified gravity // J. Cosm. Astropart. Phys. – 2015. – Vol. 2015. – P. 007

136 Arguelles C. R., Becerra-Vergara E. A., Krut A., Yunis R., Rueda J. A., Ruffini R. Implications of relativistic fermionic dark matter // Int. J. Mod. Phys. D. – 2022a. – Vol. 31. – P. 2230002

137 Balberg S. et al. Evolution of dark matter halos // ApJ. – 2002. – Vol. 568. – P. 475

138 Xiao H. et al. Dark matter in the early universe // J. Cosm. Astropart. Phys. – 2021. – P. 039

139 Chau W. Y., Lake K., Stone J. Stellar structure models in general relativity // ApJ. – 1984. – Vol. 281. – P. 560

140 Ingrosso G., Ruffini R. Gravitational lensing effects in strong fields // Nuovo Cimento B Serie. – 1988. – Vol. 101. – P. 369

141 Gao J. G., Merafina M., Ruffini R. Equilibrium structures of polytropic spheres // A&A. – 1990. – Vol. 235. – P. 1

142 Chavanis P. H., Sommeria J. Statistical mechanics of self-gravitating systems // MNRAS. – 1998. – Vol. 296. – P. 569

143 Bilic N., Munyaneza F., Tupper G. B., Viollier R. D. Dark matter models and neutrino stars // Prog. Part. Nucl. Phys. – 2002. – Vol. 48. – P. 291

144 Chavanis P. H. Statistical mechanics of self-gravitating systems // Int. J. Mod. Phys. B. – 2006. – Vol. 20. – P. 3113

145 Destri C., de Vega H. J., Sanchez N. G. Cosmic structure formation // New A. – 2013. – Vol. 22. – P. 39

146 Arguelles C. R., Ruffini R. Self-interacting dark matter in galaxies // Int. J. Mod. Phys. D. – 2014. – Vol. 23. – P. 1442020

147 Chavanis P.H., Lemou M., Méhats F. Quantum corrections in astrophysical systems // Phys. Rev. D. – 2015. – Vol. 92. – P. 123527

148 Ruffini R., Arguelles C. R., Rueda J. A. Self-gravitating systems and dark matter // MNRAS. – 2015. – Vol. 451. – P. 622

149 Arguelles C. R. et al. Dark matter distribution in galactic cores // Phys. Dark Universe. – 2018. – Vol. 21. – P. 82

150 Arguelles C. R. et al. Fermionic dark matter in the Milky Way // Phys. Dark Universe. – 2019. – Vol. 24. – P. 100278

151 Becerra-Vergara E. A. et al. Constraints on dark matter from galactic rotation curves // A&A. – 2020. – Vol. 641. – P. A34

152 Becerra-Vergara E. A. et al. Dark matter profiles in the Milky Way // MNRAS. – 2021. – Vol. 505. – P. L64

153 Arguelles C. R., Mestre M. F., Becerra-Vergara E. A., Crespi V., Krut A., Rueda J. A., Ruffini R. Core-halo profiles from self-gravitating fermions // MNRAS. – 2022b. – Vol. 511. – P. L35

154 Chavanis P.H. Self-gravitating Bose-Einstein condensates // Phys. Rev. D. – 2022. – Vol. 106. – P. 043538

155 Krut A., Argüelles, C. R., Chavanis P. H., Rueda J. A., Ruffini R. Properties of dark matter cores // ApJ. – 2023. – Vol. 945. – P. 1

156 Alberti G., Chavanis P.H. Statistical mechanics of self-gravitating systems // Eur. Phys. J. B. – 2020. – Vol. 93. – P. 208

157 Katz J. Stability of stellar systems // MNRAS. – 1978. – Vol. 183. – P. 765

158 Katz J. Stability criteria for self-gravitating systems // MNRAS. – 1979. – Vol. 189. – P. 817

159 Chavanis P.H. Dark matter models and kinetic theory // Eur. Phys. J. Plus. – 2020. – Vol. 135. – P. 290

160 Chavanis P.H., Alberti, G. Statistical equilibrium of dark matter halos // Phys. Lett. B. – 2020. – Vol. 801. – P. 135155

161 Oppenheimer J. R., Volkoff G. M. On massive neutron cores // Phys. Rev. – 1939. – Vol. 55. – P. 374

162 Schiffrin J. S., Wald R. M. General relativity and thermodynamics // Class. Quantum Grav. – 2014. – Vol. 31. – P. 035024

163 Novikov I. D., Thorne K. S. Black Holes (Les Astres Occlus) // In DeWitt C., DeWitt B., eds. Gordon and Breach, N.Y. – 1973. – P. 343
164 Page D. N., Thorne K. S. Disk-accretion onto a black hole // ApJ. – 1974. – Vol. 191. – P. 499
165 Thorne K. S. Energy extraction from a black hole // ApJ. – 1974. – Vol. 191. – P. 507
166 Godfrey B. B. Instabilities in astrophysical plasmas // Phys. Rev. D. – 1970. – Vol. 1. – P. 2721
167 Chen W.-X., Beloborodov A. M. Neutrino-cooled accretion disks // ApJ. – 2007. – Vol. 657. – P. 383
168 Liu T., Gu, W.-M., Zhang B. Accretion physics and gamma-ray bursts // New Astron. Rev. – 2017. – Vol. 79. – P. 1
169 Haiman, Z., Loeb, A. Direct collapse black holes in the early universe // ApJ. – 2001. – Vol. 552. – P. 459
170 Abolmasov P., Chashkina, A. Analysis of accretion disk instabilities // MNRAS. – 2015. – Vol. 454. – P. 3432
171 Karukes E. V., Benito M., Iocco F., Trotta R., Geringer-Sameth, A. Dark matter in dwarf galaxies // J. Cosm. Astropart. Phys. – 2020. – Vol. 2020. – P. 033
172 Mo H., van den Bosch F., White S. Galaxy Formation and Evolution. – Cambridge Univ. Press, Cambridge. – 2010
173 Binney J., Tremaine S. Galactic Dynamics, 2nd edn. – Princeton Univ. Press, Princeton. – 2008
174 Bryan G. L., Norman M. L. The structure of the intergalactic medium // ApJ. – 1997. – Vol. 495. – P. 80
175 Navarro J. F., Frenk C. S., White S. D. M. Universal density profile for dark matter halos // Astrophys. J. – 1997. – Vol. 490. – P. 493
176 Maccio A. V., Paduroiu S., Anderhalden D., Schneider A., Moore B. Properties of dark matter halos // MNRAS. – 2012. – Vol. 424. – P. 1105
177 Fitts A. et al. The faint end of the galaxy luminosity function // MNRAS. – 2019. – Vol. 490. – P. 962
178 Press W., Schechter P. Formation of galaxies and clusters of galaxies // ApJ. – 1974. – Vol. 187. – P. 425
179 Kolb E. W., Turner M. S. The Early Universe. – Frontiers in Physics, Westview Press, Boulder, CO. – 1990
180 Bode P., Ostriker J. P., Turok N. Halo formation and structure // ApJ. – 2001. – Vol. 556. – P. 93
181 Arguelles C. R., Boshkayev K., Krut A., Nurbakyt G., Rueda J. A., Ruffini R., Uribe-Su arez J. D. Yunis R., On the growth of supermassive black holes formed from the gravitational collapse of fermionic dark matter cores// Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, (MNRAS) -2023. -Vol. 523. -P. 2209-2218.

182 Lovell M. R. et al. The structure of warm dark matter halos // MNRAS. – 2012. – Vol. 420. – P. 2318
183 Boyarsky A., Drewes M., Lasserre T., Mertens S., Ruchayskiy O. Sterile neutrinos in astrophysics // Prog. Part. Nucl. Phys. – 2019. – Vol. 104. – P. 1
184 Bullock J. S., Boylan-Kolchin M. Small-scale structure of cold dark matter // Ann. Rev. Astron. Astrophys. – 2017. – Vol. 55. – P. 343
185 Adhikari R. et al. Gravitational wave background from early universe sources // JCAP. – 2017. – Vol. 2017. – P. 25
186 Yunis R., Arguelles C. R., Scoccola C. G., Nacir D. L., Giordano G. Dark matter halo structures // J. Cosm. Astropart. Phys. – 2021.
187 Viel M., Becker G., Bolton J., Haehnelt M. Probing the intergalactic medium with quasars // Phys. Rev. D. – 2013. – Vol. 88. – P. 43502
188 Rueda J. A., Ruffini R., Kerr R. P. Black hole physics and general relativity // ApJ. – 2022. – Vol. 929. – P. 56
189 Bardeen J. M. Timelike and null geodesics in the Kerr metric // Black Holes. Les Astres Occlus, Les Houches, France. – 1973. – P. 215–239
190 Boshkayev K., Idrissov A., Luongo O., Malafarina D. Compact objects in modified gravity // MNRAS. – 2020. – Vol. 496. – P. 1115
191 Boshkayev K., Konysbayev T., Kurmanov E., Luongo O., Malafarina D., Quevedo H. Properties of relativistic stars // Phys. Rev. D. – 2021. – Vol. 104. – P. 084009

ҚОСЫМША А ПРЕСС-ШЕХТЕР ПАРАДИГМАСЫ БОЙЫНША ҚАРАҢҒЫ МАТЕРИЯ ГАЛОСЫНЫҢ ҚАЛЫПТАСУЫ

Фермиондық ҚҚ галостарын МЭАП арқылы сипаттайтын шешімдерді есептеу контекстінде, 4.2-бөлімде көрсетілгендей және бастапқыда [132] әзірлегендей, негізгі параметр шешімдер үшін шекаралық шарттардан туындайды, өйткені бұл жалпы квазитепе-теңдік шешімдер тек олардың массасы мен радиусы мұндай құрылымдарға тән болған жағдайда ғана ҚҚ галостарын сипаттай алады [157,158]. Шынында да, осы жүйенің термодинамикалық тұрақтылығы туралы мұндай талдаудың қорытындылары осындай шекаралық шарттарға сезімтал болып табылады, басқа авторлар дәл осы талдауды қолданып, галактикалық галолардан кіші жүйелерді қарастырғанда әртүрлі қорытындыларға келген [155,164]. Осылайша, галактикалық галоға сәйкес келетін масса мен радиусты дұрыс таңдау маңызды болып табылады. Қараңғы материя гало массалары, әдетте, бақылаулар арқылы жақсы бағаланатын көрсеткіш болып табылады [179], бірақ мұндай құрылымдардың радиусын анықтау қолданылатын нақты космологиялық модельге байланысты өзгеруі мүмкін[180]. Мұндай радиустарды өлшеудің кең таралған әдісі – гравитациялық байланысқан құрылымға вириялық теореманы қолдану арқылы алынатын вириялық радиус**.** Алайда, қолданылатын коллапс модельдерінің ерекшеліктеріне байланысты айырмашылықтар туындағандықтан, оның орнына r_{200} радиусы жиі қолданылады. Бұл жүйенің тығыздығы фондық қараңғы материя тығыздығынан 200 есе үлкен болатын радиус ретінде анықталады[181], және көптеген модельдер үшін вириялық радиус r_{vir} мәніне жақын болады [182]. Осылайша, бұл құрылымдар үшін масса мен r_{200} радиусы арасындағы байланыс салыстырмалы түрде тікелей болады.

$$M_{vir} = 200\frac{4}{3}\pi r_{200}^3 \rho_c(t) = 100\frac{H_0^2 r_{200}^3 [1+z(t)]^3}{G}, \tag{A1}$$

Мұнда M_{vir} объектінің (вириалдық) массасын білдіреді. Алайда, бұл анықтаманың уақытқа тәуелді екендігін көреміз, өйткені Әлемнің фондық тығыздығы уақыт өте өзгеріп отырады. Космологиялық контексте бұл уақыттық тәуелділікті мәселенің кеңістіктік масштабтарының уақытпен бірге кеңеюі ретінде де қарастыруға болады.

Бұл уақыттық тәуелділікті азайту үшін алғашқы қадам ретінде M_{vir} мөлшеріндегі құрылымның ең ықтимал коллапс уақытын бағалап, осындай масштабқа сәйкес келетін физикалық радиусты анықтауға болады. Бұл коллапс уақытын терең зерттеу, әдетте, құрылымдық түзілу мен бейсызық космологияны толық талдауды талап етеді[183,184,185].

Алайда, бұл зерттеу үшін Пресс-Шехтер формализмі [186] жеткілікті, ол белгілі бір модель үшін сызықтық космология нәтижелеріне негізделген. Бұл жақсы зерттелген теория, оның толық сипаттамасын [180,181] еңбектерінен табуға болады. Мұнда біз тек негізгі жорамалдар мен нәтижелердің қысқаша мазмұнымен шектелеміз. Бұл формализмді зерттеу үшін алдымен зат басым болатын кейінгі кезеңдегі Әлемде артық тығыздықтардың қалай коллапсқа ұшырайтынын қарастыру қажет. Бұл үшін бейсызық коллапстың қарапайым модельдерінің бірі – сфералық коллапс моделін қолдануға болады[180]. Осы модельдің жорамалдарына сәйкес, кез келген артық тығыздық вириалданған құрылым түзу үшін коллапсқа ұшырайды, және осы сәтте сызықтық теорияның ұйытқу эволюциясы артық тығыздықтың мәнін $\delta_c \sim 1.69$, деп болжайды. Демек, осы теорияға сүйене отырып, егер артық тығыздық өрісі сызықтық динамикаға сәйкес дамитын болса, онда тығыздықтың $>\delta_c$ шегінен асуы коллапсқа ұшыраған галоға сәйкес келеді.

Пресс-Шехтер формализмінің[186] негізгі жорамалы осы бақылауды гало массасы функциясымен байланыстыруға негізделген. Бұл формализм Әлемдегі жалпы массаның массасы M -ден үлкен гало ішіндегі үлесі, артық тығыздықтың δ_c -ден үлкен болу ықтималдығына тең деп болжайды. Мұнда $\delta_M(t)$ –массасы M -ге сәйкес келетін сүзгі арқылы орташа алынған артық тығыздық өрісі.

σ_M Бұл зерттеуде бізге нақты масса үлесін білу маңызды емес. Бізді қызықтыратыны – массасы M болатын артық тығыздықтардың ең ықтимал коллапсқа ұшырайтын сипаттамалық уақыт шкаласы. Бұл жағдайда, көпшілігі коллапсқа ұшырайтын сәт, Гаусс өрісінің стандартты ауытқуы σ_M (массалық дисперсия) δ_c шегінен асқан кез деп есептеуге болады. Осылайша, массасы M болатын артық тығыздық үшін сипаттамалық коллапс уақыты келесі өрнекпен анықталады:

$$\sigma_M\left(z^*\right)=\delta_c, \tag{A2}$$

Стандартты ауытқудың квадраты $\sigma_M^2(t)$ келесі өрнекпен беріледі:

$$\sigma_M^2(t)=\frac{1}{2\pi^2}\int_0^\infty P(k)D^2(t)W^2(k,R)k^2dk \tag{A3}$$

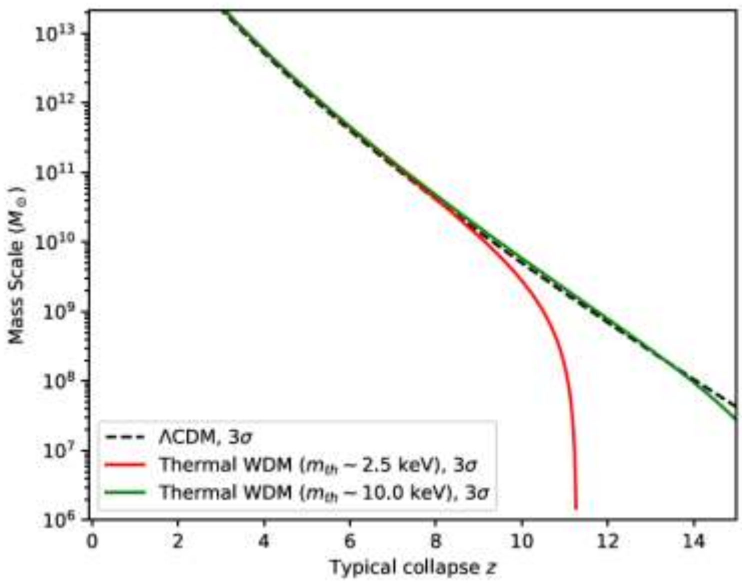
Мұнда $D(t)$ – ұйытқудың сызықтық өсу жылдамдығы, $P(k)$ – сызықтық материяның қуат спектрі, $W(k,R)$– сипаттамалық радиусы $R(M)$ болатын терезе функциясы (бұл жерде топ-хэт функциясы ретінде қабылданған, [180] қараңыз), $\delta_c \simeq 1.69$ сфералық коллапс үшін тән шекті тығыздық [180].

Бұл сипаттамалық коллапс массасын алу үшін белгілі бір космологиялық модельге сәйкес сызықтық материя қуат спектрін білу қажет. Алдыңғы бөлімдерде біз ҚМ (қараңғы материя) гало түзілуінің бөлшек массасына тәуелді сипаттамасын қарастырдық, мұндағы O массалар шамамен 100 кэВ ретінде алынған. Бұл бөлшек массасы көптеген стандартты суық қараңғы материя (СҚМ) модельдерінің болжағанынан әлдеқайда жеңіл [187]. Керісінше, бұл стандартты СҚМ теориясының кеңейтілген түрі – жылы қараңғы материя (ЖҚМ) моделіне меңзейді [188,189,190].

Бұл ЖҚМ модельдері, әдетте, кэВ диапазонындағы ҚМ бөлшек массаларымен сипатталады және олардың бастапқы жылдамдық дисперсиясы стандартты СҚМ-ге қарағанда әлдеқайда жоғары болады. Бұл өз кезегінде, Әлемдегі ұсақ масштабты құрылымдардың аз мөлшерін болжайды және СҚМ-мен байланысты кейбір мәселелерді шешуі мүмкін [191].

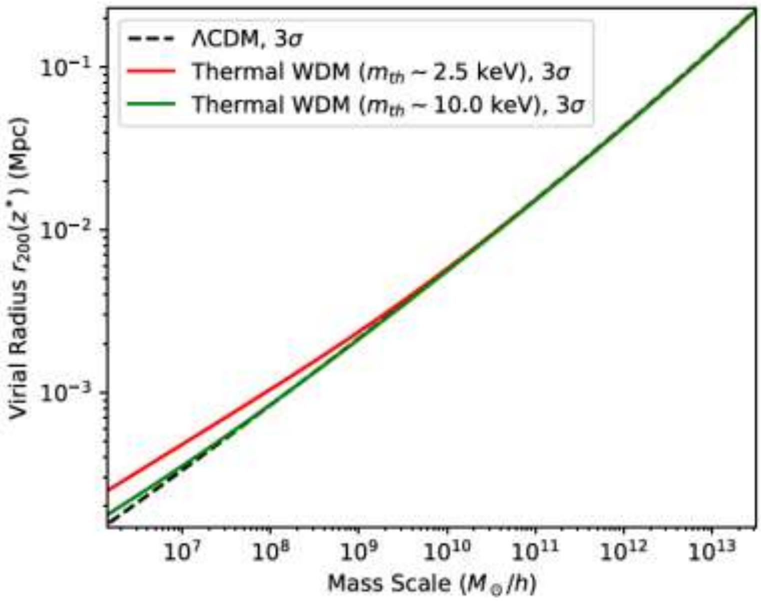
ЖҚМ бөлшектерін жасаудың ең қарапайым сценарийі – бұл бөлшектердің Әлемнің алғашқы тарихында жылулық процестер арқылы пайда болуы. Шынында да, бұл өндіріс сценарийі бастапқы плазмада 10^3 дәрежесінен жоғары еркіндік дәрежелерін талап етеді[180]. Бұл сценарий басқа өндіріс сценарийлері үшін қызықты эталон болып табылады, өйткені олардың көпшілігі материя қуат спектрінде ұқсас басу сипаттамасына ие.

Бұл ЖҚМ сценарийін жүзеге асыра алатын қызықты модельдердің бірі – стерильді нейтрино ЖҚМ моделі, мұнда бұл бөлшектердің тепе-теңдіксіз өндірісі бақыланатын қараңғы материя фракциясын түсіндіре алады [183,185]. Сонымен қатар, бөлшектердің өзара әрекеттесуі бұл модельдердегі параметрлік кеңістікті бақылау нәтижелерімен сәйкестендіруге көмектесе алады [186].



Сурет А.1 – Субқұрылым массасы M функциясы ретінде сипаттамалық коллапс қызыл ығысуы z^*

СҚМ модельдері қара сызықтармен көрсетілген, ал жылулық ЖҚМ реликті модельдері үшін $mc^2 = 2.5кэВ$ және $mc^2 = 10.0кэВ$ сәйкесінше қызыл, көк және жасыл түстермен белгіленген. Бұл жерде қарастырылған модельдер (А3) теңдеуі мағынасында 3σ шегінде алынған және ең ерте мүмкін болатын гало түзілуін бағалау үшін қолданылған.



Сурет А.2 – Вириациялану кезіндегі вириялық радиус r_{200} субқұрылым массасы M функциясы ретінде. СҚМ модельдері қара сызықтармен көрсетілген, ал жылулық ЖҚМ реликті модельдері үшін $mc^2 = 2.5 кэВ$, $mc^2 = 5 кэВ$ және $mc^2 = 10.0 кэВ$ сәйкесінше қызыл, көк және жасыл түстермен белгіленген. Бұл жерде қарастырылған модельдер (А3) теңдеуі мағынасында 3σ шегінде алынған және ең ерте мүмкін болатын гало түзілуін бағалау үшін қолданылған.

Біз Пресс-Шехтер формализміне сәйкес А.2-суретте вириялық радиус r_{200} -тің гало массасы M функциясындағы нәтижелерін көре аламыз, ал А.1- суретте типтік коллапс қызыл ығысуы z^* -тің M - ге тәуелділігі көрсетілген. Бұл есептеулер үш жылулық ЖҚМ моделі мен стандартты СҚМ моделі үшін жүргізілді.

Сілтеме ретінде, 2.5 және 10 кэВ жылулық модельдерінің әлсіреу сипаттамалары сәйкесінше 15 және 100 кэВ резонансты емес өндірілген стерильді нейтриноларға ұқсас ([189] критерийлері бойынша). Біз сондай-ақ СҚМ моделін қосамыз, бірақ (А3) теңдеуі 3σ шегінде қайта есептелген, бұл формализмде алғашқы коллапс құрылымдары түзілген уақытты сипаттайды. Бұл құрылымдар сирек кездесетін 3σ артық тығыздықтар δ_c шегін кесіп өтіп, бейсызық коллапсқа енген кезде пайда болады деп есептеледі.

Алайда, осы зерттеулерге қатысты масса шкалаларында ЖҚМ және СҚМ модельдері арасындағы r_{200} айырмашылықтары минималды, сондықтан бұл космологиялық модельдерді ҚМ гало шешімдерін есептеу үшін өзара алмастыруға болады.

ҚОСЫМША В ГЕОДЕЗИКАЛЫҚ ДИСКТІҢ АККРЕЦИЯСЫ

Бұл бөлімде Керр қара құрдымындағы геодезикалық жіңішке дисктен заттың аккрециялануы кезіндегі эволюция теңдеулерін қарастырамыз. Бұл зерттеу [171, 172, 173] еңбектеріне негізделеді.

Экваторлық жазықтықта (θ=π/2) және оған жақын аймақта Керр кеңістігінің метрикасы келесі түрде жазылады:

$$ds^2 = -e^{2\nu}dt^2 + e^{2\psi}(d\phi - \omega dt)^2 + e^{2\mu}dr^2 + dz^2, \tag{B1}$$

мұндағы z - экваторлық жазықтықтан биіктік, ал ν, ψ, μ, ω - радиалды координатаның r функциялары:

$$e^{2\nu} = \frac{r^2\Delta}{A},\ \ e^{2\psi} = \frac{A}{r^2},\ \ e^{2\mu} = \frac{r^2}{\Delta},\ \ \omega = \frac{2Mar}{A}, \tag{B2}$$

мұндағы $\Delta = r^2 - 2Mr + a^2$, және $A = (r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2$, M - қара құрдым массасы, ал $a = J/M$ — оның меншікті бұрыштық импульсі.

Аккреция кезінде материя мен радиация қара құрдымға энергия және бұрыштық импульсін береді. Бұл процесте сәуле шығарудың кері әсерін ескеру маңызды, өйткені ол қара құрдымның экстремалды күйге ($a = M$) жетуіне жол бермейді [174]. Яғни, массивті бөлшектер мен радиацияның аккрециясы қара құрдымды жалаңаш ерекшелікке айналдырмайды [173].

Қара құрдымға аккрецияланған тыныштық массасын dm деп белгілейік, сонда оның уақыт бойынша өзгеру жылдамдығы $\dot{m} = dm/dt$ болып табылады. Радиация арқылы энергия мен бұрыштық импульс берілу жылдамдықтары $\dot{M}_{rad}$ және $\dot{J}_{rad}$ деп белгіленеді. Сондықтан, ҚҚ энергия және бұрыштық импульс сақталу теңдеулері [173]:

$$\dot{M} = \dot{M}_{matter} + \dot{M}_{rad}, \tag{B3}$$

$$\dot{J} = \dot{J}_{matter} + \dot{J}_{rad}, \tag{B4}$$

Мұндағы

$$\dot{M}_{matter} = \varepsilon_0 \dot{m}, \tag{B5}$$

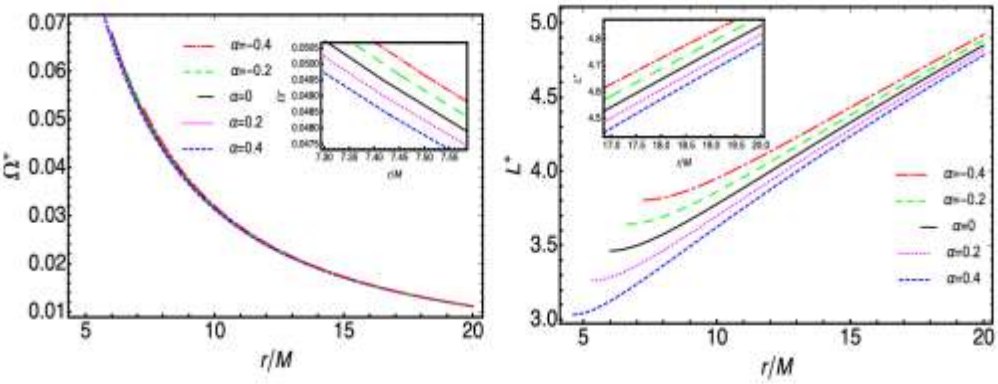
$$\dot{J}_{matter} = l_0 \dot{m}, \tag{B6}$$

$$\dot{M}_{rad} = -\frac{2}{\pi}\int_{r_0}^{\infty}\int_{0}^{\pi/2}\int_{0}^{2\pi} Ck_1 F(r)dS, \tag{B7}$$

$$\dot{J}_{rad} = \frac{2}{\pi}\int_{r_0}^{\infty}\int_{0}^{\pi/2}\int_{0}^{2\pi} Ck_\phi F(r)dS, \tag{B8}$$

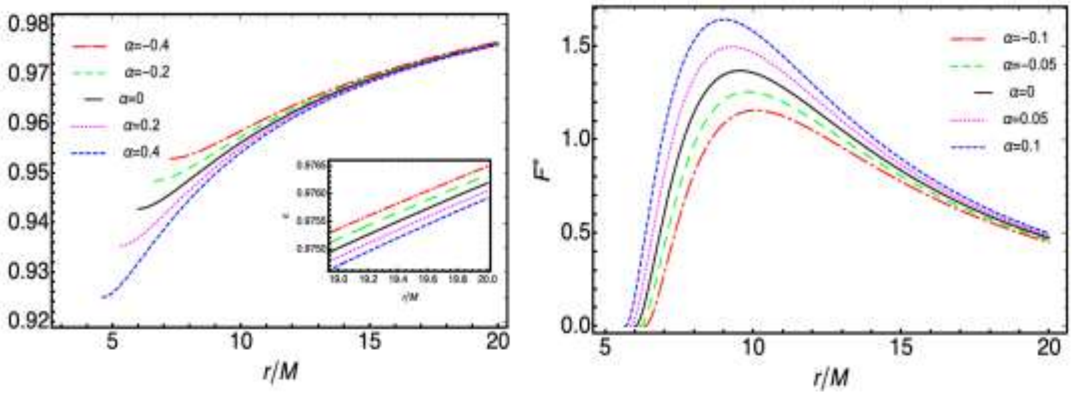
мұндағы ε_0 және l_0 – аккрецияланған заттың меншікті (яғни, бірлік массаға қатысты) энергиясы мен бұрыштық импульсі. Бұл шамалар ішкі орнықты шеңберлік орбитаның (ІОШО) радиусында r_0 есептеледі. Диск бетінен шығатын сәуле изотропты деп болжасақ, бірлесіп қозғалатын бақылаушы өлшейтін нормаланған фотондық төрт-импульс келесі түрде өрнектеледі: $k^{\tilde{\mu}} = p^{\tilde{\mu}} / p^{\tilde{0}} = (1, \sin\Theta\cos\Phi, \sin\Theta\sin\Phi, \cos\Theta)$ және $k^{\mu} = p^{\mu} / p^{\tilde{0}}$ мұндағы p^{μ} - координаталық жүйедегі нормаланған фотондық төрт-импульс. k^{μ} - нің өрнектерін [173] еңбегінің А қосымшасынан табуға болады (сондай-ақ, [190] мақаланың С қосымшасын қараңыз).

Фотондарды қара құрдым жұта ма, әлде олар шексіздікке қашып кете ме – осыны анықтайтын функция $C = C(r, \Theta, \Phi)$. Егер фотондар r радиусынан және локалды бағыты (Θ, Φ) бойынша шығарылып, қара құрдымға түссе, $C = 1$, ал егер олар шексіздікке кетсе, $C = 0$.



Сурет В.1 – Сол жақ панель: сынақ бөлшектерінің бұрыштық жылдамдығы Ω радиалдық қашықтық r бойынша көрсетілген, қара құрдым M массасының бірліктерінде. Оң жақ панель: Тест бөлшектерінің бұрыштық импульсі L^* радиалдық қашықтық r бойынша бейнеленген, қара құрдым массасының M бірліктерінде.

Бұл көрсеткіштер аккрециялық диск динамикасын және бөлшектердің қара құрдым айналасындағы қозғалысын сипаттайды.



Сурет В.2 – Сол жақ панель: Тест бөлшектерінің энергиясы (E∗E^*E∗) радиалдық қашықтық r бойынша, қара құрдым массасының M бірліктерінде көрсетілген. Оң жақ панель**:** Аккрекциялық дискінің сәулелік ағыны F^* радиалдық қашықтық r бойынша, қара құрдым массасының M бірліктерінде бейнеленген. Ағынның мәні 10^5-не көбейтілген.

Бұл графиктер қара құрдымға заттың түсуі мен оның сәуле шығару сипаттамаларын бейнелейді.

Беттік элемент ауданы келесі түрде өрнектеледі: $dS = 2\pi r \sin\Theta \cos\Theta d\Phi d\Theta dr$. F(r) функциясы дискіден бөлінетін сәуле шығару ағыны, бірге қозғалатын бақылаушы өлшейтін мән ([171, 172]:

$$F(r) = -\frac{\dot{m}}{4\pi\sqrt{-g}} \frac{\Omega_{,r}}{(\varepsilon - \Omega l)^2} \int_{r_0}^{r} (\varepsilon - \Omega l) l_{,\bar{r}} d\bar{r}, \tag{B9}$$

Мұнда, $\sqrt{-g} = e^{\nu+\psi+\mu} = r, \varepsilon,$ және l - Керр метрикасындағы r радиусында орналасқан дөңгелек геодезикалық орбиталарға тән меншікті энергия және бұрыштық импульс (шексіздікте өлшенген), $\Omega = u^{\phi}/u^{t}$ - координаталық жүйеде өлшенген бұрыштық жылдамдық, мұндағы u^{μ} - сұйықтықтың төрт-жылдамдығы [191].

Айнымалыны өзгерту арқылы $x = \sqrt{r/M}$ теңдеуді былай жазуға болады:

$$\varepsilon = \frac{x^3 - 2x \pm \alpha}{x^{3/2}\sqrt{x^3 - 3x \pm 2\alpha}}, \tag{B10}$$

$$l = \pm \frac{M(x^4 \mp 2\alpha x \pm \alpha^2)}{x^{3/2}\sqrt{x^3 - 3x \pm 2\alpha}}, \tag{B11}$$

$$\Omega = \frac{1}{M}\frac{1}{\alpha \pm x^3}, \tag{B12}$$

Мұнда $\alpha = a/M$ – өлшемсіз айналу параметрі. Жоғарғы/төменгі таңба сәйкесінше ко-айналып жатқан және қарсы айналып жатқан дөңгелек орбиталарға сәйкес келеді. Айқын түрде, бізде $\varepsilon_0 = \varepsilon(r_0)$ және $l_0 = l(r_0)$.

ІОШО - ның радиусы [191] бойынша былай беріледі:

$$r_0 = M\left[3 + Z_2 \mp \sqrt{(3 - Z_1)(3 + Z_1 + 2Z_2)}\right], \tag{B13}$$

Мұнда:

$$Z_1 = 1 + \left(1 - \alpha^2\right)^{1/3}\left[(1+\alpha)^{1/3} + (1-\alpha)^{1/3}\right], \tag{B14}$$

$$Z_2 = \sqrt{3\alpha^2 + Z_1}, \tag{B15}$$

В.1-суретте де біз бөлшектердің орбиталық бұрыштық жылдамдығын $\Omega^* = M\Omega$ (сол жақ панель) және сынақ бұрыштық импульсін $L^* = l/M$ (оң жақ панель) қарастырамыз. Бұл көрсеткіштер Керр метрикасына негізделіп, айналу параметрінің әртүрлі мәндері үшін есептелген. Қарама-қарсы айналатын бөлшектер ко-айналып жатқан бөлшектерге қарағанда үлкенірек бұрыштық жылдамдық пен импульске ие болады (толығырақ [192,193] қараңыз).

В.2-суретте сынақ бөлшектердің бірлік массаға шаққандағы энергиясы (сол жақ панель) және аккреция дискісінен шығатын радиациялық ағын $F^* = 10^5 M^2 F/\dot{m}$ (оң жақ панель) радиалды координатаға тәуелділікте бейнеленген. Бұл параметрлер әртүрлі айналу параметрлері үшін зерттелген.